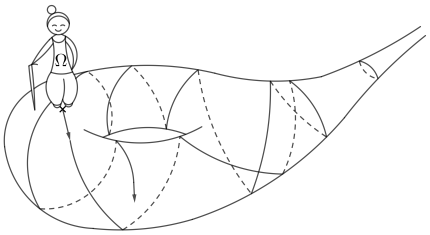
Seminario de Licenciatura

Mixing topológico del flujo geodésico en superficies hiperbólicas de volumen finito



Vanessa L. Matus de la Parra Rodríguez

Bajo la tutela de
Felipe Riquelme
Radu Saghin

Financiado parcialmente por el Proyecto FONDECYT Regular 1171477

"Partially Hyperbolic Systems in Low Dimensions".

Instituto de Matemática
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Valparaíso, Chile

2017

Agradecimientos

Quiero agradecer a cada uno de mis profesores por el conocimiento que me han entregado en estos años, en particular al grupo de Sistemas Dinámicos de Valparaíso por la motivación en esta bella área y las múltiples oportunidades de acercarme a ella. Gracias a Radu Saghin por el financiamiento para llevar a cabo este seminario y hacerme notar cuánto tiempo de estudio perdía en el patio. En especial, quiero agradecer a Felipe Riquelme por toda la dedicación y paciencia que ha puesto en nuestro trabajo, por la retroalimentación en cada paso y más aún por la confianza que ha depositado en mí.

Sin lugar a dudas, incluyo en este agradecimiento a mis profesores del colegio y a mis amigos, quienes han hecho su mejor intento por estar conmigo el día de mi defensa.

Finalmente, agradezco a mi familia (tatas, tíos y padres) por inculcar que el tesoro más grande es la educación y por el enorme esfuerzo que siempre han puesto en que mis hermanos y yo gocemos de tal tesoro.

Índice

1. Introducción **5**

2. Semi-plano de Poincaré e isometrías positivas **7**
2.1. Isometrías positivas de $\mathbb{H}$ 7
2.2. Dinámica de las isometrías positivas 11
2.3. Modelo del disco de Poincaré 12

3. Grupos fuchsianos **14**
3.1. Superficie Cociente. 14
3.2. Dominios Fundamentales. 16

4. Flujo geodésico **19**
4.1. Flujo geodésico como acción matricial. 22
4.2. Flujo geodésico en superficies cocientes 22
4.3. Función de Busemann. 23
4.4. Dinámica del flujo geodésico. 28

5. Mixing del flujo geodésico **32**
5.1. Previos dinámicos 32
5.2. Superficies hiperbólicas como espacios de medida 33
5.3. Mixing topológico del flujo geodésico 34
5.4. Comentario final 38

1. Introducción

Uno de los principales intereses en Sistemas Dinámicos es medir caos. Este concepto engloba una serie de fenómenos, tales como: abundancia de puntos periódicos, abundancia de órbitas densas, predicción de la posición de puntos a lo largo del tiempo. Con esto en mente tiene sentido estudiar la interacción de puntos de distintas localidades del espacio en cuestión. Es aquí donde nace la noción de *mixing*. El mixing topológico de un sistema dinámico es la propiedad de interacción persistente en tiempos futuros entre regiones independientes del espacio. En particular esta propiedad nos dice que no es posible predecir con precisión la ubicación de un punto en el futuro. Formalmente, se tiene la siguiente definición.

Definición 1.1. *Diremos que un flujo* $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *definido sobre un espacio topológico* X *es* topológicamente mixing *si para cada par de abiertos* U, V*, existe* $T > 0$ *tal que*

$$\varphi_t(U) \cap V \neq \emptyset, \forall t > T.$$

Probar que un flujo satisface la propiedad de mixing sobre espacios métricos compactos es un problema de por sí complicado, pero añadir un factor de no compacidad del espacio lo convierte en un problema aún más desafiante.

Un primer paso para comenzar a abarcar esta problemática es considerar espacios donde la dinámica en las zonas no compactas esté bien controlada. Este es el caso de superficies hiperbólicas, donde el sistema dinámico natural a considerar es aquel definido por seguir las curvas que minimizan distancia, es decir, curvas geodésicas.

Siguiendo esta idea, en estas notas consideraremos superficies hiperbólicas y estudiaremos la propiedad de mixing de un sistema dinámico muy particular definido tanto geométrica como algebraicamente: *el flujo geodésico*. Éste es el flujo determinado por seguir a tiempo t la geodésica orientada determinada por un punto y un vector en el plano tangente en este punto.

El siguiente enunciado es el resultado principal de estas notas.

Teorema 1.2. *El flujo geodésico sobre una superficie hiperbólica de volumen finito es topológicamente mixing.*

Las superficies hiperbólicas son siempre obtenidas como cocientes del semiplano de Poincaré por subgrupos discretos del grupo de isometrías que preservan orientación. Notemos que las superficies de volumen finito no necesariamente son compactas. Éstas pueden admitir regiones no compactas, a las cuales llamaremos cúspides. En las cúspides, la dinámica del flujo geodésico es bien descrita en términos de la acción de subgrupos parabólicos del subgrupo discreto a considerar.

Como se mencionó anteriormente, el flujo geodésico se puede definir de forma geométrica estudiando las geodésicas en la superficie y también se puede estudiar algebraicamente como la acción matricial de multiplicar por la derecha por una matriz con un parámetro temporal. Estas dos maneras de ver el flujo nos dan

dos posibles demostraciones del mixing, tanto en medida como topológico. En estas notas nos enfocaremos en el método algebraico para resolver el problema.

En la demostración algebraica definiremos el flujo horocíclico dilantante h_s^+ y el contractante h_u^-. Mediante componer estos flujos y el flujo geodésico en tiempos $s, t, u \in \mathbb{R}$ es posible obtener un conjunto de medida total de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Utilizando este hecho fijaremos una función $F \in L^2$ con integral nula y probaremos que el único punto de acumulación débil de $(F \circ g_t)_{t\in\mathbb{R}}$ es la función nula. Esto se obtiene utilizando la invarianza por los flujos h_s^+, h_u^- y g_t junto al teorema de Fubini, lo cual es una caracterización del mixing en medida, que describe el comportamiento asintticamente independiente de los sucesos. En este contexto, esto implica el mixing topológico del flujo.

Estas notas están organizadas de la siquiente manera. En la Sección 2 vamos a situarnos en el semi-plano de Poincaré $\mathbb{H}$ como primer modelo de superficie hiperbólica y vamos a determinar cuál es el grupo de isometrías que actúa sobre éste. También mostraremos el modelo hiperbólico del disco de Poincaré denotado por $\mathbb{D}$, que corresponde a un modelo isométrico al de $\mathbb{H}$.

En la Sección 3 estudiaremos la acción por subgrupos discretos del grupo de isometrías, los cuales llamaremos *grupos fuchsianos*, pues éstos nos permitirán obtener otros modelos de superficies hiperbólicas, de hecho todas ellas, mediante cocientar $\mathbb{H}$ por grupos fuchsianos. Este cociente resulta ser una variedad salvo finitos puntos y posee una métrica inducida por la métrica en el fibrado unitario tangente de $\mathbb{H}$.

En la sección 4 definiremos el flujo geodésico de forma geométrica sobre el fibrado unitario tangente de $\mathbb{H}$ el cual denotamos por $\mathrm{T}^1\mathbb{H}$ y lo proyectaremos en un flujo sobre superficies cocientes de la forma $\mathrm{T}^1\mathbb{H}/\Gamma$ con Γ grupo fuchsiano. Este espacio es el fibrado unitario tangente del orbifold $\mathbb{H}/\Gamma$ salvo en las singularidades. También es en esta sección que estudiaremos la acción matricial que tiene el flujo geodésico por multiplicación por la derecha y definiremos la función de Busemann para luego exhibir las variedades fuertemente estables e inestables que éste posee.

Finalmente estudiaremos las propiedades de mixing en la Sección 5, construyendo una medida de volumen sobre $\mathrm{T}^1\mathbb{H}/\Gamma$ y probando el mixing en medida para ella y así concluir el mixing topológico. Al final de esta sección daremos algunas ideas y referencias sobre las generalizaciones de este resultado.

Las cuatro primeras secciones están basadas en el libro *Trajectories géodésiques et horocicliques* de Françoise Dal'Bo [D3] y en el libro *Fuchsian Groups* de Svetlana Katok [KA]. La última sección est basada en las notas *Sur le mélange du flot géodésique* de Yves Coudène.

2. Semi-plano de Poincaré e isometrías positivas

2.1. Isometrías positivas de $\mathbb{H}$

Consideremos $\mathbb{H}$ el semi-plano de Poincaré definido por

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$$

y G el grupo de aplicaciones

$$g(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc = 1$. Observemos que estas aplicaciones son las transformaciones de Möbius cuyos coeficientes como función racional son reales.

Proposición 2.1. *Los elementos de G son homeomorfismos.*

Demostración. Notemos que si $z, w \in \mathbb{H}$ son tales que $g(z) = g(w)$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{az+b}{cz+d} &= \frac{aw+b}{cw+d} \\ \Leftrightarrow acwz + bcw + adz + bd &= acwz + bcz + adw + bd \\ \Leftrightarrow (ad-bc)z &= (ad-bc)w \\ \Leftrightarrow z &= w. \end{aligned}$$

Luego g es inyectiva. Además, si $w \in \mathbb{H}$ es un punto cualquiera del semiplano, basta tomar $z = \frac{wd-b}{a-cw}$ para tener que $g(z) = w$, de lo cual se tiene la sobreyectividad. La continuidad de g y g^{-1} son claras de la definición y del hecho que $cz + d \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{H}$. $\square$

Este grupo actúa sobre $\mathbb{H}$, pues

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} g(z) &= \frac{1}{2i}\left[\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}\right] \\ &= \frac{1}{2i}\left[\frac{(az+b)(c\overline{z}+d) - (a\overline{z}+b)(cz+d)}{|cz+d|^2}\right] \\ &= \frac{1}{2i}\left[\frac{(ad-bc)z + (bc-ad)\overline{z}}{|cz+d|^2}\right] \\ &= \frac{z-\overline{z}}{2i} \cdot \frac{1}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2} > 0. \end{aligned}$$

Proposición 2.2. *La acción de G sobre $\mathbb{H}$ es transitiva.*

Demostración. Basta probar que para cualquier $w \in \mathbb{H}$, existe $g \in G$ tal que $g(w) = i$). Sea $w = x + iy \in \mathbb{H}$ y tomemos la aplicación

$$g(z) = \frac{\sqrt{y}z + \sqrt{y}x}{1/\sqrt{y}},$$

se tiene que $\sqrt{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} - 0 \cdot \sqrt{y}x = 1$, de lo cual $g \in G$, y además $g(i) = w$. $\square$

La acción de G sobre $\mathbb{H}$ se extiende al fibrado tangente $\mathrm{T}\,\mathbb{H} = \{(z, \overrightarrow{u}) : z \in \mathbb{H}, \overrightarrow{u} \in \mathrm{T}_z\,\mathbb{H}\}$ mediante

$$g \cdot (z, \overrightarrow{u}) = (g(z), (d_z g)(\overrightarrow{u})).$$

Como $(d_z g)(\overrightarrow{u}) = \frac{\overrightarrow{u}}{(cz+d)^2}$, entonces $g \cdot (z, \overrightarrow{u}) \in \mathrm{T}\,\mathbb{H}$, de lo cual esta acción está bien definida. Que sea acción de grupo es consecuencia de la regla de la cadena.

Para $z \in \mathbb{H}$, definimos la métrica riemanniana $\mathsf{g}_z : \mathrm{T}_z\,\mathbb{H} \times \mathrm{T}_z\,\mathbb{H} \to \mathbb{R}$ por

$$\mathsf{g}_z(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{1}{(\operatorname{Im} z)^2} \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle_{\mathbb{R}^2},$$

donde $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle_{\mathbb{R}^2}$ es el producto interno usual de $\mathbb{R}^2$.

Llamamos *fibrado unitario tangente* al subespacio $\mathrm{T}^1\mathbb{H}$ de $\mathrm{T}\,\mathbb{H}$ definido por

$$\mathrm{T}^1\mathbb{H} = \{(z, \overrightarrow{u}) \in \mathrm{T}\,\mathbb{H} : \mathsf{g}_z(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = 1\},$$

que corresponde a los pares punto-vector, donde el punto está en $\mathbb{H}$ y el vector es unitario en el plano tangente en ese punto.

Observación 2.3. *Pruebe que* $\mathsf{g}_{g(z)}((d_z g)(\overrightarrow{u}), (d_z g)(\overrightarrow{v})) = \mathsf{g}_z(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

De lo anterior se tiene que G actúa sobre $\mathrm{T}^1\mathbb{H}$ por restricción de la acción en $\mathrm{T}\,\mathbb{H}$.

Observación 2.4. *La acción de G sobre $T^1\mathbb{H}$ es simplemente transitiva.*

Proposición 2.5. *El grupo G preserva la métrica g de manera conforme*

Demostración. De la invarianza de g por la acción de $h \in G$, se tiene

$$\begin{aligned}
\ell(g(c)) &= \int_a^b \mathsf{g}_{g(c(t))}((g \circ c)'(t), (g \circ c)'(t))^{\frac{1}{2}}\,dt \\
&= \int_a^b \mathsf{g}_{g(c(t))}((d_{c(t)} g)c'(t), (d_{c(t)} g)c'(t))^{\frac{1}{2}}\,dt \\
&= \int_a^b \mathsf{g}_{c(t)}(c'(t), c'(t))^{\frac{1}{2}}\,dt = \ell(c).
\end{aligned}$$

Por lo tanto G preserva la métrica g y por la Observacin 2.3 lo hace de manera conforme. $\square$

Decimos que un camino $c : [a, b] \to \mathbb{H}$ es $\mathscr{C}^1$ por partes si es de clase $\mathscr{C}^0$ y existe $n \in \mathbb{N}$ y $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ de modo que $c\big|_{(x_{i-1},x_i)}$ es de clase $\mathscr{C}^1$, para todo $1 \leqslant i \leqslant n$. Denotamos por $\mathscr{C}^1_p([a, b])$ al conjunto de los caminos $\mathscr{C}^1$ por partes definidos sobre $[a, b]$.

Sea $c : [a, b] \to \mathbb{H}$ en $\mathscr{C}^1_p([a, b])$ y su largo de curva

$$\ell(c) = \int_a^b \mathsf{g}_{c(t)}(c'(t), c'(t))^{\frac{1}{2}} dt.$$

Dados $z, z' \in \mathbb{H}$, denotamos $z \sim_c z'$ si $c \in \mathscr{C}^1_p([a, b])$, con $c(a) = z$ y $c(b) = z'$, para algún par de reales $a, b \in \mathbb{R}$. Se define $d : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}^+_0$ por

$$d(z, z') = \text{ínf}\{\ell(c) : c \in \mathscr{C}^1_p([a, b]), z \sim_c z'\}.$$

Proposición 2.6. *Sean $z, z' \in \mathbb{H}$. Entonces existe un único $c : [0, 1] \to \mathbb{H}$ en $\mathscr{C}^1_p([0, 1])$ con $c(0) = z$, $c(1) = z'$ y tal que $\ell(c) = d(z, z')$.*

Demostración. Salvo componer por un elemento de G, el cual preserva distancia, podemos suponer que $z = i$ y $z' = \alpha i$ (basta llevar z a i por la transitividad de la acción y luego aplicar una rotación para llevar z' al eje imaginario). Escribiendo $c(t) = x(t) + iy(t)$, con $y(t) \geqslant 0$ para todo $0 \leqslant t \leqslant 1$, se tiene

$$\ell(c) = \int_0^1 \mathsf{g}_{c(t)}(c'(t), c'(t))^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^1 \frac{|x'(t) + iy'(t)|}{y(t))} dt \geqslant \int_0^1 \left|\frac{y'(t)}{y(t)}\right| dt \geqslant \left| \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt \right|,$$

y la igualdad se tiene sí, y sólo si, $x(t) = 0$ para todo $0 \leqslant t \leqslant 1$ y $y'(t)$ es de signo constante. Esta última condición se debe a que si $x \equiv 0$, entonces y' cambia de signo si, y sólo si, dos intervalos tienen igual imagen, lo cual suma una cantidad positiva a la integral. De lo anterior, $\ell(c) = |\log(\alpha)|$. □

Proposición 2.7. *La aplicación d es una distancia en $\mathbb{H}$.*

Observación 2.8. *Las transformaciones de Möbius son composición de rotaciones, traslaciones y homotecias. En particular, $G < \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$.*

Más aún, veremos más adelante que $G = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$.

La topología inducida por la distancia d sobre $\mathbb{H}$ es la misma que la inducida por la distancia euclideana. Para esta topología $\mathbb{H}$ no es compacto. Vamos a compactificar $\mathbb{H}$ añadiendo un *borde al infinito* $\mathbb{H}(\infty) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y dotando a $\widehat{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{H}(\infty)$ de una topología que restricta a $\mathbb{H}$ sea la inducida por d. Para esto, definimos un abierto de $\widehat{\mathbb{H}}$ como un abierto de $\mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ (respecto a la topología inducida por la distancia euclideana sobre $\mathbb{R}^2$) o bien el punto ∞ unido al complemento de un compacto de $\mathbb{H} \cup \mathbb{R}$.
Se puede probar que $\widehat{\mathbb{H}}$ es compacto con esta topología.

La acción del grupo G sobre $\mathbb{H}$ se prolonga en una acción por homeomorfismos sobre $\mathbb{H}(\infty)$. Sea $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ un elemento de G y $x \in \mathbb{R}$,

si $c = 0$, definimos $g(x) = \frac{ax+b}{d}$, $g(\infty) = \infty$;

si $c \neq 0$, definimos $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ si $x \neq \frac{-d}{c}$, $g\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty$, $g(\infty) = \frac{a}{c}$.

Recordando que las transformaciones de Möbius envían rectas o círculos en rectas o círculos, y utilizando el hecho de que la trayectoria más corta entre puntos que pertenecen a una misma recta vertical es el segmento euclideano que los une, es natural la siguiente definición.

Definición 2.9. *Llamaremos geodésica a una semi-recta vertical de $\mathbb{H}$ o a un semi-círcunferencia euclideano de $\mathbb{H}$ centrado en un real. Denotamos por $(x\ y)$ la geodésica que une a los puntos $x, y \in \mathbb{H}(\infty)$.*

(Ver figura 1).

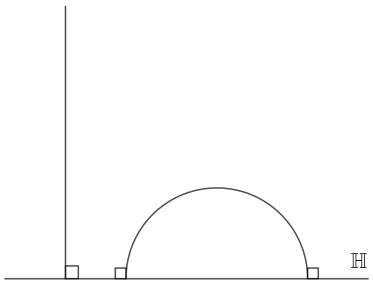


Figura 1: Modelo Hiperbólico de $\mathbb{H}$.

Sean

$K = \left\{ e_\theta(z) = \frac{z\cos\theta - \sin\theta}{z\sin\theta + \cos\theta} : \theta \in \mathbb{R} \right\}$;

$A = \{h_a(z) = az : a \in \mathbb{R}, a > 0\}$;

$N = \{p_b(z) = z + b : b \in \mathbb{R}\}$.

Estos son subgrupos de G que se pueden caracterizar por sus puntos fijos en $\hat{\mathbb{H}}$, la compactificación de $\mathbb{H}$. Observemos que K es el estabilizador de i; una isometría h es un elemento de A si, y sólo si, fija 0 e ∞ (además dejan invariante la geodésica $(0\ \infty)$, pues actúan por traslación en dicha recta); y $p \neq id$ es un elemento de N si, y sólo si, p fija solamente el punto ∞. Además N fija las rectas euclideanas horizontales y actúa en ellas por traslación.

Proposición 2.10. $G = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$.

Demostración. Basta probar que $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}) \subset G$. Sea $f \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$. Como la acción de G sobre H es transitiva e isométrica, salvo componer con un elemento de G, podemos suponer que f fija i. Más específicamente, si $f(i) = w$, y $g \in G$ es

tal que $g(w) = i$, entonces $\widetilde{f} = f \circ g \in G$ es tal que $\widetilde{f}(i) = i$. Si $f(\alpha i) = z_0$, como $f(i) = i$, sabemos que z_0 está a la misma distancia de i que αi. De lo anterior, existe un real θ tal que $e_\theta(z_0) = \alpha i$. Además, $e_\theta(i) = i$, de lo cual $e_\theta \circ f(i) = i$ y $e_\theta \circ f(\alpha i) = \alpha i$. Luego $e_\theta \circ f(\beta i) = \beta i$, para todo $\beta \in \mathbb{R}$.

Si $z \in \mathbb{H} \setminus \{\beta i : \beta \in \mathbb{R}\}$, la geodésica que une z con αi es enviada a través de $e_\theta \circ f$ en una geodésica entre $e_\theta \circ f(z)$ y αi que corta en el mismo ángulo al eje imaginario. Como además $e_\theta \circ f$ preserva orientación, se tiene que $e_\theta \circ f(z) = z$. Así $e_\theta \circ f = id$ y por lo tanto $f = e_\theta^{-1} \in G$.

□

2.2. Dinámica de las isometrías positivas

A un elemento $g \in G$ de la forma $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, con $ad - bc = 1$, le podemos asociar el valor absoluto de su traza, definido por

$$|\operatorname{tr}(g)| := |a + d|.$$

Si g es no trivial, el signo de $|\operatorname{tr}(g)| - 2$ determina cuántos puntos fijos tiene en $\widehat{\mathbb{H}}$, como veremos en la siguiente proposición.

Proposición 2.11. *Sea $g \in G \setminus \{id\}$.*

(i) Si $|\operatorname{tr}(g)| > 2$, entonces g fija exactamente dos puntos de $\widehat{\mathbb{H}}$, estos puntos pertenecen a $\mathbb{H}(\infty)$ y g es conjugada en G a un elemento de A.

(ii) Si $|\operatorname{tr}(g)| < 2$, entonces g fija exactamente un punto de $\widehat{\mathbb{H}}$, este punto pertenece a $\mathbb{H}$ y g es conjugada en G a un elemento de K.

(iii) Si $|\operatorname{tr}(g)| = 2$, entonces g fija exactamente un punto de $\widehat{\mathbb{H}}$, este punto pertenece a $\mathbb{H}(\infty)$ y g es conjugada en G a un elemento de N.

Demostración. Sea $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ un elemento de $G \setminus \{id\}$. Si $c = 0$, g es de la forma $g(z) = a'z + b'$, de lo cual g sólo fija $\infty \in \mathbb{H}(\infty)$. Como $g(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$, con $a'd' - b'c' = 1$, $c' = 0$, $d' = 1$, entonces $a' = 1$ y así $g(z) = z + b'$ es un elemento de N.

Si $c \neq 0$, entonces $g(z) = z$ si, y sólo si,

$$z = \frac{a - d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}.$$

Si $|\operatorname{tr}(g)| = 2$, entonces el único punto fijo de g es $x = \frac{a-d}{2c} \in \mathbb{H}(\infty)$. Vía una aplicación $f \in G$ tal que $f(x) = \infty$, tenemos que $f \circ g \circ f^{-1}(\infty) = \infty$ y $f \circ g \circ f^{-1}(z) \neq z$ para todo $z \in \widehat{\mathbb{H}} \setminus \{\infty\}$. Luego $f \circ g \circ f^{-1}$ es de la forma $az + b$, como en el caso $c = 0$.

Si $|\operatorname{tr}(g)| < 2$, las soluciones a la ecuación de punto fijo son dos distintas en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, donde una es conjugada a la otra, por lo cual sólo una de ellas está en $\mathbb{H}$. Si $z \in \mathbb{H}$ es el punto fijo, los círculos centrados en z son invariantes por g, pues g preserva la distancia. Si $f \in G$ tal que $f(z) = i$, entonces los círculos

hiperbólicos de radio r centrados en z son enviados vía f a círculos hiperbólicos de radio r centrados en i. Como $f \circ g \circ f^{-1}$ fija i y deja invariantes los círculos centrados en i, se tiene que esta aplicación pertenece al subgrupo K.

Si $|\operatorname{tr}(g)| > 2$ entonces g tiene 2 puntos fijos y éstos están en $\mathbb{H}(\infty)$.

Sean $x_-, x_+ \in \mathbb{H}(\infty)$ los puntos fijos de g. Sea $z \in (x_- \; x_+)$ y $\overrightarrow{v} \in \mathrm{T}_z\,\mathbb{H}$ el vector basado en z que es tangente a la geodésica $(x_- \; x_+)$. Como la acción de G sobre $\mathrm{T}^1\mathbb{H}$ es simplemente transitiva, existe una única isometría $f \in G$ tal que $f \cdot (z, \overrightarrow{v}) = (i, (0,1))$, con $(0,1) \in \mathrm{T}_i\,\mathbb{H}$. Así la geodésica $(x_- \; x_+)$ es enviada vía f a la geodésica $(0 \; \infty)$. Entonces existe un elemento h de A tal que $f^{-1} \circ h \circ f = g$, de lo cual g es conjugada en G a un elemento de A.

□

En los casos (i), (ii) y (iii) de la proposición, diremos que la isometría g es hiperbólica, elíptica o parabólica, respectivamente.

Observación 2.12. *Observemos que la imagen de rectas verticales a través de isometrías son geodésicas, la imagen de rectas horizontales son círculos euclideanos tangentes a la imagen de ∞ en el borde al infinito y la imagen de círculos hiperbólicos son círculos hiperbólicos. Con lo anterior, las isometrías hiperbólicas preservan las geodésicas cuyos extremos son los puntos fijos y actúan por traslación en aquellas geodésicas. Las isometrías parabólicas preservan rectas horizontales si fijan ∞ o bien círculos euclideanos tangentes a $x \in \mathbb{H}(\infty)$, donde x es fijo por la isometría. Las isometrías elípticas preservan las bolas hiperbólicas centradas en su punto fijo.*

2.3. Modelo del disco de Poincaré

Consideremos $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y la aplicación

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{H} &\to \mathbb{D} \\ z &\mapsto i\frac{z-i}{z+i}, \end{aligned}$$

conocida como la transformación de Cayley, y cuya inversa es la aplicación

$$\begin{aligned} \psi^{-1} : \mathbb{D} &\to \mathbb{H} \\ z &\mapsto i\frac{1+z}{1-z}. \end{aligned}$$

Es claro que ψ es un difeomorfismo, de lo cual podemos dotar a $\mathbb{D}$ de una métrica riemanniana inducida por la métrica de $\mathbb{H}$. Sea $z \in \mathbb{D}$ y sean $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathrm{T}_z\,\mathbb{D}$, entonces la métrica $(\mathrm{g}_z^{\mathbb{D}})_z$ está definida como

$$\mathrm{g}_z^{\mathbb{D}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \left(\frac{2}{1-|z|^2}\right)^2 \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle.$$

Así obtenemos otro modelo hiperbólico el cual es isométrico al del semi-plano de Poincaré. También es posible demostrar que

$$\operatorname{Isom}^+(\mathbb{D}) = \left\{ h(z) = \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ y } |a|^2 - |b|^2 > 0 \right\},$$

componiendo las isometrías de $\mathbb{H}$ por ψ, y que además este grupo coincide con las homografías $\frac{az+b}{cz+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ que preservan el disco $\mathbb{D}$.

Análogo al modelo del semi-plano, compactificamos $\mathbb{D}$ añadiendo un borde al infinito $\mathbb{D}(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, y dotando a $\widehat{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup \mathbb{D}(\infty)$ con la topología inducida por la métrica euclideana. Las geodésicas en el disco corresponden a diámetros de éste o a arcos de circunferencia perpendiculares al borde del disco, como se ve en la figura 2.

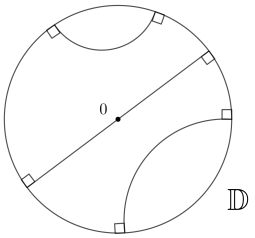


Figura 2: Modelo Hiperbólico de $\mathbb{D}$.

Extendemos también la acción de $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{D})$ a $\widehat{\mathbb{D}}$. Esta acción, tanto como en $\mathbb{D}$, es transitiva.

Como los dos modelos son isométricos, la clasificación en isometrías hiperbólicas, parabólicas y elípticas se traspasa de manera natural a $\mathbb{D}$ vía ψ.

3. Grupos fuchsianos

A fin de obtener otras superficies hiperbólicas, estamos interesados en hacer cocientes de $\mathbb{H}$ por subgrupos del grupo de isometrías que permitan llevar al cociente la estructura riemanniana que tiene $\mathbb{H}$. Dotemos a G de la topología que tiene como grupo de matrices. Esto es, si $g \in G$ es tal que $g(z) = \dfrac{a_{11}z + a_{12}}{a_{21}z + a_{22}}$, con $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$, entonces pensamos en g como la matriz $A = (a_{ij})_{i,j}$ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Así es posible dotar a G de la topología que tiene $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ como subespacio de $\mathbb{R}^4$ o como 3-variedad diferenciable.

Definición 3.1. *Diremos que un subgrupo $\Gamma < G$ es un grupo fuchsiano si es un subgrupo discreto.*

Definición 3.2. *Decimos que un subgrupo $\Gamma < G$ actúa de forma propiamente discontinua si para todo compacto $K \subseteq \mathbb{H}$, el conjunto $\{\gamma \in \Gamma : \gamma K \cap K\}$ es finito.*

Proposición 3.3. *Todo grupo fuchsiano actúa de forma propiamente discontinua.*

Demostración. Sea $\Gamma < G$ fuchsiano, y $K \subseteq \mathbb{H}$ un conjunto compacto. Denotemos $K^1 = \{(z, \vec{u}) : z \in K\} \subset \mathrm{T}^1\mathbb{H}$. Observemos que si $\gamma \in \Gamma$ es tal que $\gamma K \cap K \neq \emptyset$, entonces $\gamma \cdot K^1 \cap K^1 \neq \emptyset$. Fijemos un elemento $v \in \mathrm{T}^1\mathbb{H}$. Como la acción de G sobre $\mathrm{T}^1\mathbb{H}$ es simplemente transitiva, se tiene una aplicación

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{T}^1\mathbb{H} &\to G \\ w &\mapsto h_w, \end{aligned}$$

donde $h_w \in G$ es la única isometría tal que $h_w \cdot v = w$. La aplicación Φ es un homeomorfismo y así $C = \Phi(K^1)$ es compacto, pues K^1 lo es.

Sea $w \in K^1$ con $\gamma \cdot w \in K^1$, entonces $h_{\gamma \cdot w} \cdot (h_w^{-1} \cdot w) = \gamma \cdot w$ y así $\gamma = h_{\gamma \cdot w} h_w \in CC^{-1}$. Como CC^{-1} es compacto y Γ es discreto, se sigue que la intersección $CC^{-1} \cap \Gamma$ es un conjunto finito. Luego Γ actúa de forma propiamente discontinua. $\square$

3.1. Superficie Cociente.

Considerando un grupo fuchsiano Γ de G. En esta sección veremos que el cociente de $\mathbb{H}$ o $\mathbb{D}$ por tal subgrupo tiene, salvo a lo más en un número finito de puntos, estructura diferenciable. Esto nos permite obtener diversas superficies hiperbólicas dependiendo del grupo fuchsiano Γ. Estas superficies heredan la estructura de $\mathbb{H}$, respectivamente de $\mathbb{D}$, y sobre ellas también se podrá definir el flujo geodésico. La geometría que estas superficies tengan será determinante para la dinámica que este flujo.

Proposición 3.4. *Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un espacio topológico X y sea $p : X \mapsto X/\sim$ la proyección natural. Si p es abierta y $Graf = \{(x, y) \in X \times X : y \sim x\}$ es cerrado, entonces $X/\sim$ es Hausdorff.*

Demostración. Sean $u = p(x)$, $v = p(y)$ dos puntos distintos en X/Γ. Entonces $(x, y) \notin Graf$. Así, existen vecindades abiertas U y V de x e y respectivamente, tales que $(U \times V) \cap Graf = \varnothing$, puesto que $Graf$ es cerrado.
Tenemos entonces que $u \in p(U)$ y $v \in p(V)$, las cuales son vecindades abiertas de estos puntos, pues p es abierta. Afirmamos que además $p(U) \cap p(V) = \varnothing$. En efecto, supongamos que existe $w = p(\xi) = p(\eta)$, con $\xi \in U$, $\eta \in V$. Entonces $(\chi, \eta) \in Graf \cap (U \times V)$, lo cual es una contradicción.
De lo anterior $X/\sim$ es Hausdorff. □

Proposición 3.5. *Sea $\Gamma < Isom^+(\mathbb{H})$ grupo fuchsiano. Entonces las órbitas de Γ son discretas y cerradas, y el espacio topológico cociente $\mathbb{H}/\Gamma$ es Hausdorff.*

Demostración. Notemos primero que $\mathbb{H}$ es localmente compacto, puesto que la topología de $\mathbb{H}$ es la misma que la topología que tiene como subespacio de $\mathbb{C}$. Sean $z, w \in \mathbb{H}$, K vecindad compacta de w. Afirmamos que $\Gamma z \cap K$ es finito. En efecto, basta notar que si $\mu z, \sigma z \in K$, entonces $(\mu \circ \sigma^{-1})(\sigma z) \in K$, esto es, $\gamma = \mu \circ \sigma^{-1}$ es tal que $\gamma K \cap K \neq \varnothing$. Como los grupos fuchsianos actúan de forma propiamente discontinua, hay finitos de tales γ, por lo cual hay finitos $\mu, \sigma \in \Gamma$ con la propiedad anterior.

De lo anterior, no puede existir un punto de acumulación de una órbita, ya que localmente hay sólo finitos puntos y así ésta es cerrada y discreta.

Demostraremos ahora que el cociente es Hausdorff. Primero observamos que el cociente por Γ es cocientar por la relación de equivalencia

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \gamma \in \Gamma, \gamma x = y.$$

Ahora estamos en las condiciones de la proposición anterior. Sea $\pi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}/\Gamma$ la proyección natural. Es fácil ver que π es abierta, puesto que si $U \subset \mathbb{H}/\Gamma$ es abierto, $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma U$ es abierto en $\mathbb{H}$. Para ver que el espacio cociente es Hausdorff, basta ver que el conjunto $Graf = \{(x, y) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H} : y \in \Gamma x\}$ es cerrado en $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$. Sea $(x, y) \in (\mathbb{H} \times \mathbb{H} \setminus Graf)$, $V \subset E$ una vecindad compacta de x. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\overline{B_y(1/n)} \cap \Gamma x$ es un conjunto finito, por lo cual se puede tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $W \cap \Gamma x = \varnothing$, donde $W = \overline{B_y(1/n_0)}$. Además, el conjunto $G_{V \cup W} = \{g \in \Gamma : g(V \cup W) \cap (V \cup W) \neq \varnothing\}$ es finito, y así

$$U = V \setminus \left(V \setminus \left(\bigcup_{g \in G_{V \cup W}} W \right) \right)$$

es una vecindad de x, con $(U \times W) \cap Graf = \varnothing$. Luego $Graf$ es cerrado y así $\mathbb{H}/\Gamma$ es Hausdorff. □

Más aún, es posible ver que el cociente es un orbifold, y que es variedad si, y sólo si, Γ no posee elementos elípticos. De hecho, esta variedad cociente es una superficie hiperbólica cuando Γ no contiene elementos elípticos y tiene finitas singularidades cuando sí posee de éstos elementos. Finalmente el cociente $\mathrm{T}^1\mathbb{H}/\Gamma$ corresponde al espacio tangente a $\mathbb{H}/\Gamma$ fuera de las singularidades (ver [TH, Proposición 13.2.1]).

La siguiente definición es esencial en lo que sigue.

Definición 3.6. *Diremos que S es una superficie hiperbólica si corresponde al cociente de $\mathbb{H}$ por un grupo fuchsiano $\Gamma < \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$.*

En geometría riemanniana, se define superficie hiperbólica como toda superficie cuya curvatura es constante igual a -1. Sin embargo, es posible demostrar que estas definiciones son equivalentes (Véase [BE, Teorema B.1.8]).

3.2. Dominios Fundamentales.

La forma de la superficie cociente, su volumen y la dinámica que tendrá el flujo geodésico sobre ésta, se caracterizan por subconjuntos de la superficie $\mathbb{H}$ o $\mathbb{D}$ que dependen de la acción del grupo fuchsiano $\Gamma < G$ por el cual vamos a cocientar, llamados Dominios Fundamentales. Nos enfocaremos principalmente en el caso de $\mathbb{H}$, aunque para el modelo del disco unitario es análogo.

Definición 3.7. *Dado $\Gamma < G$ grupo fuchsiano, llamaremos* Dominio Fundamental *de Γ a un subconjunto $D \subset \mathbb{H}$ de interior no vacío que satisface las siguientes dos propiedades:*

(i) para todo $\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}$,
$$\gamma D^\circ \cap D^\circ = \varnothing,$$
donde D° denota el interior de D;

(ii) para todo $z \in \mathbb{H}$, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma z \in D$.

Veamos algunos ejemplos sencillos de grupos fuchsianos y cómo resulta el espacio cociente.

Ejemplo 3.8. Si $\Gamma = \langle h \rangle$, donde $h(z) = az$, con $a \in \mathbb{R}^+$, tomamos por dominio fundamental el semi-anillo determinado por las geodésicas $(-1\ 1)$ y $(-a\ a)$ (Ver figura 3).

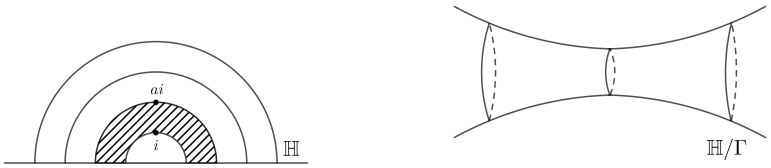


Figura 3: Cociente por isometría hiperbólica.

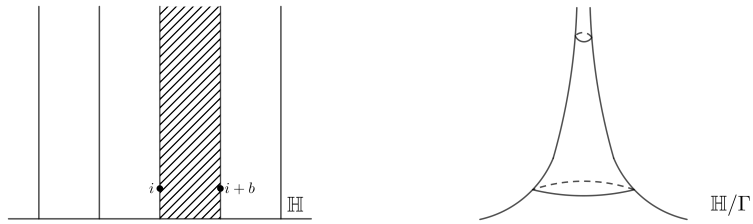


Figura 4: Cociente por isometría parabólica.

Ejemplo 3.9. Si $\Gamma = \langle p \rangle$, con $p(z) = z + b$, $b \in \mathbb{R}$, entonces tenemos el dominio fundamental delimitado por las geodésicas $(0\ \infty)$ y $(b\ \infty)$ (Ver figura 4).

Ejemplo 3.10. Si $\Gamma = \langle e \rangle$, siendo $e(z) = \dfrac{z\cos\theta - \sin\theta}{z\sin\theta + \cos\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $e^m = id$, puesto que Γ es fuchsiano. Así, tomamos como dominio fundamental la región delimitada por los rayos geodésicos $[i\ x)$ e $[i\ e(x))$ (Ver figura 5).

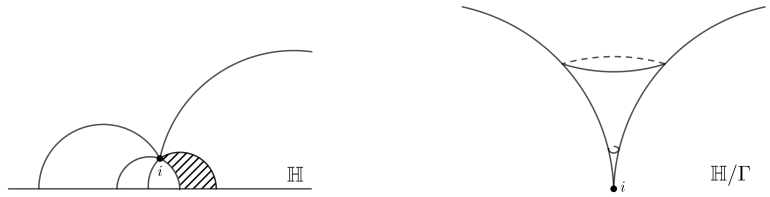


Figura 5: Cociente por isometría elíptica.

Ejemplo 3.11. Sea $\Gamma = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Denotemos $D := \{z \in \mathbb{H} : |\operatorname{Re}(z)| \leqslant 1/2, |z| \geqslant 1\}$.

Recordemos que $\operatorname{Im} g(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}$, donde $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Sea $z \in \mathbb{H}$ fijo. Como los coeficientes de estas aplicaciones están en $\mathbb{Z}$, $|cz + d|$ alcanza un mínimo y por lo tanto $\operatorname{Im} g(z)$ alcanza un máximo. Tomemos $\widehat{g} \in G$ que maximiza $\operatorname{Im} \widehat{g}(z)$ y aplicamos T^n con $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $|\operatorname{Re}(T^n \widehat{g}(z))| \leqslant \frac{1}{2}$.

Supongamos por absurdo que $|T^n \widehat{g}(z)| < 1$ y por lo tanto $|ST^n \widehat{g}(z)| > 1$.

Entonces

$$\mathrm{Im}(ST^n\widehat{g}(z)) = \frac{\mathrm{Im}(T^n\widehat{g}(z))}{|T^n\widehat{g}(z)|^2} > \mathrm{Im}(T^n\widehat{g}(z)) = \mathrm{Im}(\widehat{g}(z)),$$

lo cual es una contradicción, pues $ST^n\widehat{g}(z)$ tiene parte imaginaria mayor a la de $\widehat{g}(z)$. De lo anterior, $|T^n\widehat{g}(z)| \geqslant 1$. Tomando $g = T^n\widehat{g}$, tenemos que $g(z) \in D$. Más aún, se puede tomar $g \in \langle S, T\rangle$ tal que $g(z) \in D$.

Veamos que $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) = \langle S, T\rangle$. Sea $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, entonces sabemos que existe $g' \in < S, T >$ tal que si z está en el interior de D, entonces $g'g(z) \in D$. Luego z y $g'g(z)$ están en la misma órciba. Por lo tanto, $z = g'gz$, lo cual implica que $g'g = id$ y así $g = g^{-1} \in \langle S, T\rangle$. Por lo tanto $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) = \langle S, T\rangle$.

Concluimos que D es dominio fundamental para la acción de $\Gamma = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ (Ver figura 6).

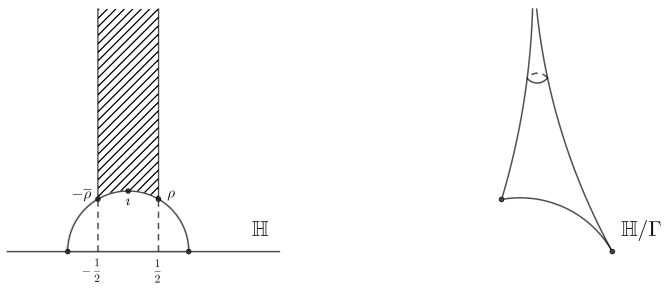


Figura 6: Superficie modular

Sea $z_0 \in \mathbb{H}$ un punto tal que para toda isometría $\gamma \in \Gamma$, $\gamma(z_0) \neq z_0$. Asociemos a este punto z_0 y a $\gamma \in \Gamma$ el conjunto

$$\mathbb{H}_{z_0}(\gamma) := \{z \in \mathbb{H} : d(z, z_0) \leqslant d(z, \gamma(z_0))\}.$$

Proposición 3.12. *El conjunto*

$$\mathscr{D}_{z_0}(\Gamma) := \bigcap_{\gamma \in \Gamma \setminus \{id\}} \mathbb{H}_{z_0}(\gamma)$$

es un dominio fundamental convexo, el cual llamaremos Dominio de Dirichlet. Además, todos los dominios de Dirichlet de un grupo fuchsiano Γ *tienen igual área hiperbólica (Ver [KA, Teorema 3.2.2.]).*

4. Flujo geodésico

Para dotar a $\mathrm{T}^1\mathbb{H}$ de una distancia, necesitamos primero ver que cada elemento de $\mathrm{T}^1\mathbb{H}$ determina una única geodésica que pasa por su componente en $\mathbb{H}$ y tal que el vector en el espacio tangente es tangente a la geodésica.

Sea $\mathsf{e} = (i, (0,1)) \in \mathrm{T}^1\mathbb{H}$. Es claro que la geodésica $(0\ \infty)$ pasa por i y el vector $(0,1) \in \mathrm{T}_i\,\mathbb{H}$ es tangente a ésta en i. Supongamos que existe otra geodésica $(x_-\ x_+)$ que pasa por i. Si $x_- \neq 0, \infty$, entonces $x_+ \neq 0, \infty$ y así $(x_-\ x_+)$ es una semi-circunferencia, de lo cual corta transversalmente a $(0\ \infty)$ en i. Luego $(0,1) \in \mathrm{T}_i\,\mathbb{H}$ no puede ser tangente a la geodésica $(x_-\ x_+)$. Si $x_- = \infty$, entonces $x_+ = 0$. En tal caso la geodésica invierte su orientación, y $(0,1) \in \mathrm{T}_i\,\mathbb{H}$ sigue siendo tangente a ella.

Sea $u = (z, \overrightarrow{u}) \in \mathrm{T}^1\mathbb{H}$. Denotamos por $(u(t))_{t\in\mathbb{R}}$ la parametrización por longitud de arco de la única geodésica orientada que pasa por z y con tangente en z dirigida por el vector $\overrightarrow{u}$. Esto es,

$$u(0) = z \ \text{ y } \ \frac{du}{dt}(0) = \overrightarrow{u}.$$

Denotamos por $v(-\infty)$ y por $v(+\infty)$ a los extremos negativo y positivo, respectivamente, de la geodésica parametrizada por $(v(t))_{t\in\mathbb{R}}$ (ver figura 7).

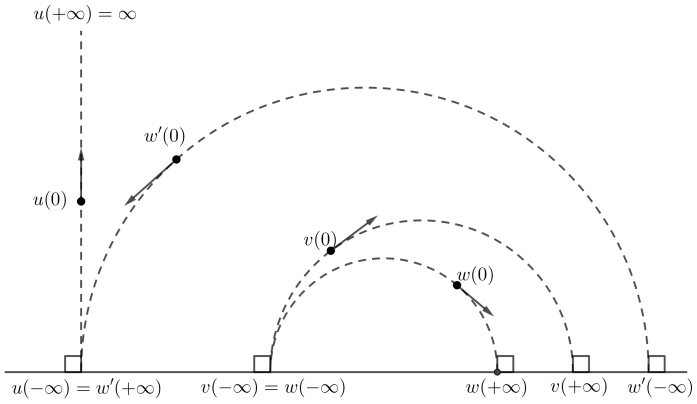


Figura 7:

Definimos sobre $\mathrm{T}^1\mathbb{H}$ la distancia $D : \mathrm{T}^1\mathbb{H} \times \mathrm{T}^1\mathbb{H} \to \mathbb{R}$ por

$$D(u,v) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|} d(u(t), v(t))dt.$$

Observemos que $0 \leqslant D(u,v) \leqslant 2d(u(0), v(0)) < +\infty$ y $D(u,v) = 0$ si, y sólo si, $u = v$ (pues d es distancia en $\mathbb{H}$ y el argumento de la integral es no negativo).

Además, para $u, v, w \in \mathrm{T}^1\mathbb{H}$,

$$\begin{aligned} D(u,w) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|} d(u(t), w(t))dt \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|}(d(u(t), v(t)) + d(v(t), w(t)))dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|} d(u(t), v(t))dt + \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|} d(v(t), w(t))dt \\ &= D(u,v) + D(v,w). \end{aligned}$$

De lo anterior, D es una distancia para $\mathrm{T}^1\mathbb{H}$. Más aún, esta distancia es invariante por la acción de G sobre $\mathrm{T}^1\mathbb{H}$, como consecuencia de la invarianza de d por la acción de G sobre $\mathbb{H}$.

Proposición 4.1. *Sean $(u_n)_{n\geqslant 1} \subseteq T^1\mathbb{H}$ y $u \in T^1\mathbb{H}$. Entonces*

$$\lim_{n\to+\infty} D(u_n, u) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n(+\infty) = u(+\infty) \ y \ \lim_{n\to\infty} u_n(0) = u(0).$$

Definimos $\widetilde{g} : \mathbb{R} \times \mathrm{T}^1\mathbb{H} \to \mathrm{T}^1\mathbb{H}$ por

$$\widetilde{g}(s,u) = \left(u(s), \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=s} \right).$$

Proposición 4.2. *La aplicación $\widetilde{g}_t(v) = \widetilde{g}(t,v)$ es un flujo.*

Demostración. (i) Si $v = (z, \overrightarrow{v}) \in \mathrm{T}^1\mathbb{H}$, entonces $\widetilde{g}_0(v) = \left(v(0), \frac{dv}{dt}(0)\right) = (z, \overrightarrow{v}) = v$;

(ii) $\widetilde{g}_r \circ \widetilde{g}_s(v) = \widetilde{g}_r\left(v(s), \frac{dv}{dt}(s)\right)$.

Escribiendo $(w(t))_{t\in\mathbb{R}}$ la parametrización de la geodésica de modo que $w(0) = v(s)$ y $\frac{dw}{dt}(0) = \frac{dv}{dt}(s)$, entonces por unicidad de solución, se tiene que

$$\frac{dw}{dt}(r) = \frac{dv}{dt}(r+s),$$

y así,

$$\widetilde{g}_r \circ \widetilde{g}_s(v) = \left(v(r+s), \frac{dv}{dt}(r+s) \right) = \widetilde{g}_{r+s}(v), \forall v \in \mathrm{T}^1\mathbb{H}, \forall r, s \in \mathbb{R}.$$

(iii) Considerando $(i, (0,1) \in \mathrm{T}^1\mathbb{H}$, es claro que si tomamos $t, s \in \mathbb{R}$, la distancia entre $\widetilde{g}_t(i,(0,1))$ y $\widetilde{g}_s(i,(0,1))$ es $|\ln(t-s)|$ y ası$\widetilde{g}$ es continua en la primera variable. La continuidad en la segunda variable se sigue de la Proposición 4.1 y de que la primera componente del flujo es la parametrización de la geodésica determinada por el punto.

□

Llamaremos *Flujo Geodésico* a la aplicación $(\widetilde{g}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ antes definida.

Observación 4.3. *Sea $v = (z, \overrightarrow{v}) \in T^1\mathbb{H}$ y $h \in G$. Por la unicidad de la parametrización de la geodésica determinada por v, se tiene que $h(v(t)) = (h(v))(t)$ y así*

$$\widetilde{g}_s(h(v)) = \left((h(v))(s), \frac{d(h(v))}{dt}(s)\right) = \left(g(v(s)), \frac{dh}{dt}(v(s)) \cdot \frac{dv}{dt}(s)\right) = h(\widetilde{g}_s(v)).$$

Definición 4.4. *Sea X un espacio topológico y sea $\varphi : \mathbb{R} \times X \to X$ un flujo. Decimos que $x \in X$ es no-errante por φ si para toda vecindad V, existe $T > 0$ tal que $\varphi_t(V) \cap V \neq \varnothing$, para todo $t > T$. Denotamos por $\Omega_\varphi(X)$ al conjunto de todos los puntos con esta propiedad.*

Diremos que un punto es divergente (respectivamente, positiva o negativamente divergente) si su órbita (respectivamente, órbita positiva o negativa) no tiene puntos de acumulación.

Proposición 4.5. *El conjunto no-errante del flujo geodésico en $T^1\mathbb{H}$ es vacío.*

Demostración. Basta tomar $v = (z, \overrightarrow{v}) \in \mathrm{T}^1\mathbb{H}$ y $V = B(v, r)$. Entonces para todo $t \geqslant 2r$ se tiene que

$$\widetilde{g}_t(V) \cap V = \varnothing.$$

(Ver figura 8).

De lo anterior, $\Omega_{\widetilde{g}}(\mathrm{T}^1\mathbb{H}) = \varnothing$.

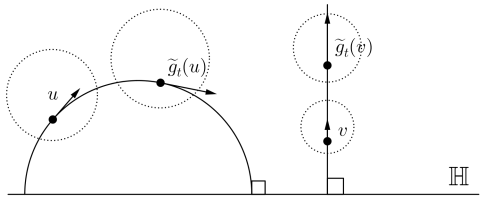


Figura 8:

□

Como los puntos de acumulación de las órbitas pertenecen al conjunto no-errante, el cual es vacío, se sigue que todos los puntos de $\mathrm{T}^1\mathbb{H}$ son divergentes para el flujo $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

4.1. Flujo geodésico como acción matricial.

Recordemos que la acción de G sobre $\mathrm{T}^1\mathbb{H}$ es simplemente transitiva (ver sección 2.1), de lo cual todo vector $v \in \mathrm{T}^1\mathbb{H}$ se puede identificar de manera única con algún $\gamma_v \in G$, donde $\gamma_v \cdot v = \mathsf{e}$. Si la aplicación γ_v se define sobre $\mathbb{H}$ por $\gamma_v(z) = \frac{a_{11}z+a_{12}}{a_{21}z+a_{22}}$, identificamos v con $A_v = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$.

Entonces tenemos una correspondencia biunívoca entre $\mathrm{T}^1\mathbb{H}$ y $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Observemos que la imagen a tiempo $t \in \mathbb{R}$ del punto $\mathsf{e} \in \mathrm{T}^1\mathbb{H}$ a través del flujo geodésico es $\tilde{g}_t(\mathsf{e}) = (ie^t, (0, e^t))$, con $(0, e^t) \in \mathrm{T}_{ie^t}\mathbb{H}$. Esto es, $\tilde{g}_t(\mathsf{e}) = e^t\mathsf{e}$. Escribiendo

$$\gamma_{\tilde{g}_t(v)} \cdot v = (e^t z, e^t \overrightarrow{v}) = \left(\frac{e^{t/2}z}{e^{-t/2}}, e^t \overrightarrow{v}\right),$$

tenemos que $\tilde{g}_t(\mathsf{e})$ se identifica con la matriz $A_{\tilde{g}_t(\mathsf{e})} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ dada por

$$G_t = A_{\tilde{g}_t(\mathsf{e})} = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}.$$

Tomemos ahora $v \in \mathrm{T}^1\mathbb{H}$ relacionado a $A_v \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Abusando de notación, no distinguiremos entre γ y su matriz correspondiente A_v, donde $\gamma \cdot \mathsf{e} = v$. Se tiene que si $A_{\tilde{g}_t(v)}$ es la matriz asociada a $\tilde{g}_t(v) \in \mathrm{T}^1\mathbb{H}$, entonces

$$\begin{aligned} A_{\tilde{g}_t(v)} \cdot \mathsf{e} &= \tilde{g}_t(v) \\ &= \tilde{g}_t(A_v \cdot \mathsf{e}) \\ &= A_v \cdot \tilde{g}_t(\mathsf{e}) \\ &= A_v \cdot (G_t \cdot \mathsf{e}). \end{aligned}$$

Ahora notemos que la composición de las aplicaciones corresponde al producto entre las matrices que las representan, de lo cual $A_v \cdot G_t = A_v G_t$. De lo anterior,

$$A_{\tilde{g}_t(v)} = A_v G_t,$$

y así la acción multiplicación por la derecha por G_t es la acción del flujo geodésico sobre $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{T}^1\mathbb{H}$.

4.2. Flujo geodésico en superficies cocientes

Ahora estamos interesados en inducir, a partir de $\tilde{g}$, un flujo en el cociente de $\mathrm{T}^1\mathbb{H}$ por un grupo fuchsiano Γ. Para esto, primero notamos que si $\gamma \in \Gamma$, en particular γ es una isometría. De esto y la Observación 4.3 se tiene que para todo $v \in \mathrm{T}^1\mathbb{H}$,

$$\tilde{g}_s(\gamma(v)) = \gamma(\tilde{g}_s(v)).$$

Denotemos por $\pi^1 : \mathrm{T}^1\mathbb{H} \to \mathrm{T}^1\mathbb{H}/\Gamma$ la proyección natural. Además, si definimos $D_\Gamma : \mathrm{T}^1\mathbb{H}/\Gamma \times \mathrm{T}^1\mathbb{H}/\Gamma \to \mathbb{R}_0^+$ por

$$D_\Gamma(\pi^1(u), \pi^1(v)) = \inf_{\gamma \in \Gamma} D(u, \gamma(v)),$$

es posible verificar que D_Γ es una distancia que induce la misma topología sobre $\mathrm{T}^1\mathbb{H}/\Gamma$ que π^1 con la topología cociente. Así, una sucesión $(\pi^1(u_n))_{n\geqslant 1} \subset \mathrm{T}^1\mathbb{H}/\Gamma$ converge a $\pi^1(u)$ si, y solamente si, existe una sucesión $(\gamma_n)_{n\geqslant 1} \subset \Gamma$ tal que $(\gamma_n(u_n))_{n\geqslant 1}$ converge a u.

Definimos $g : \mathbb{R} \times \mathrm{T}^1\mathbb{H}/\Gamma \to \mathrm{T}^1\mathbb{H}/\Gamma$ por

$$g_t(\pi^1(v)) = \pi^1(\tilde{g}_t(v)).$$

Si $\pi^1(u) = \pi^1(v)$, entonces existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(v) = u$. Así,

$$g_t(\pi^1(u)) = \pi^1(\tilde{g}_t(u)) = \pi^1(\tilde{g}_t(\gamma(v))) = \pi^1(\gamma(\tilde{g}_t(v))) = \pi^1(\tilde{g}_t(v)) = g_t(\pi^1(v)),$$

de lo cual g está bien definido. Más aún, $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$ es un flujo, el cual llamaremos *Flujo Geodésico* sobre $\mathrm{T}^1\mathbb{H}/\Gamma$.

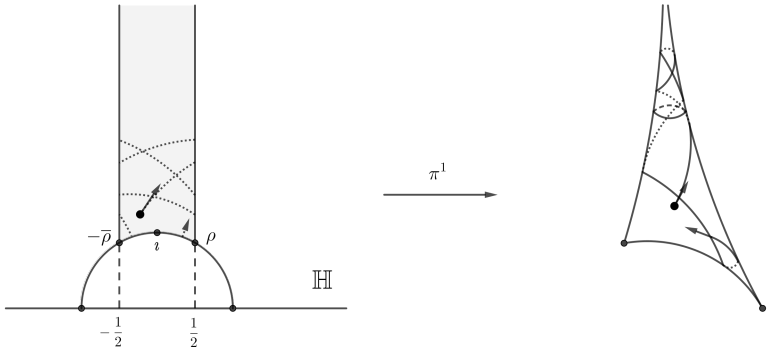


Figura 9: Flujo Geodésico en la Superficie Modular.

Proposición 4.6. *Sea $(u_n)_{n\geqslant 1} \subseteq T^1\mathbb{H}$ y $u \in T^1\mathbb{H}$. Son equivalentes:*

(i) Existe $(s_n)_{n\geqslant 1} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} g_{s_n}(\pi^1(u_n)) = \pi^1(u)$.

(ii) Existe $(\gamma_n)_{n\geqslant 1} \subseteq \Gamma$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\gamma_n(u_n(-\infty)), \gamma_n(u_n(+\infty))) = (u(-\infty), u(+\infty))$.

Demostración. Se sigue de la Proposición 4.1. □

4.3. Función de Busemann.

Para comprender cómo se comportan las órbitas de los puntos de $\mathbb{H}$ a través del flujo geodésico, es útil observar estos puntos desde un punto $x \in \mathbb{H}(\infty)$. Supongamos que $x = \infty$ y observemos dos puntos $z = ib$ y $z' = a' + ib'$. Denotemos por $(r(t))_{t\geqslant 0}$ la parametrización por longitud de arco del rayo geodésico $[z, x)$. Notemos que en este caso es la recta vertical, como indica la figura 10. Escribamos también $s(t) = a' + e^t bi$.

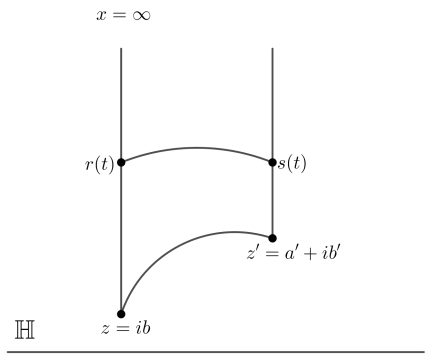


Figura 10:

Para $t > 0$ suficientemente grande, se tiene que

$$d(z, r(t)) = d(z', s(t)) + \ln(b'/b).$$

De lo anterior, y considerando que $d(s(t), r(t)) = \dfrac{|a'|}{be^t}$, tenemos

$$\begin{aligned} d(z, r(t)) - d(z', r(t)) &= d(z', s(t)) - d(z', r(t)) + \ln(b'/b) \\ &\leqslant d(z', r(t)) + d(s(t), r(t)) - d(z', r(t)) + \ln(b'/b) \\ &= \frac{|a'|}{be^t} + \ln(b'/b), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} d(z, r(t)) - d(z', r(t)) &= d(z', s(t)) - d(z', r(t)) + \ln(b'/b) \\ &\geqslant d(z', s(t)) - d(z', s(t)) - d(s(t), r(t)) + \ln(b'/b) \\ &= -\frac{|a'|}{be^t} + \ln(b'/b). \end{aligned}$$

Basta notar que $\dfrac{|a'|}{be^t} \to 0$ cuando $t \to +\infty$ para obtener que

$$\lim_{t \to +\infty} d(z, r(t)) - d(z', r(t)) = \ln(b'/b).$$

Es importante observar que este límite no depende de a'. Además, si $a' = 0$, el límite corresponde a $d(z, z')$ si $b' \geqslant b$ y a $-d(z, z')$ en otro caso. Es claro que si z tiene parte real no nula, se puede llevar a este caso aplicando una traslación. Más generalmente, si $x \neq \infty$, entonces utilizamos la aplicación

$$h(z) = \frac{xz - x^2 - 1}{z - x}.$$

Por la extensión de su acción en el borde al infinito, tenemos que $h(\infty) = x$. Como h preserva la métrica,

$$\lim_{t\to+\infty} d(z, r(t)) - d(z', r(t)) = \lim_{t\to+\infty} d(h^{-1}(z), h^{-1}(r(t))) - d(z', h^{-1}(r(t))),$$

y este límite es como en el caso anterior. Con esto vimos que si $x \in \mathbb{H}(\infty)$, $z, z' \in \mathbb{H}$ y $(r(t))_{t\in\mathbb{R}}$ parametrización por longitud de arco del rayo geodésico $[z, x)$, entonces la aplicación $t \to d(z, r(t)) - d(z', r(t))$ admite un límite en $+\infty$, denotado $B_x(z, z')$, al cual llamamos *Función de Busemann* centrada en $x \in \mathbb{H}(\infty)$, evaluada en $z, z' \in \mathbb{H}$.

Veamos que $\lim_{t\to+\infty} d(z, r(t)) - d(z', r(t))$ no depende del rayo geodésico $[z''\infty)$ parametrizado por $(r(t))_{t\in\mathbb{R}}$ por longitud de arco. En efecto, como dijimos anteriormente, este límite no depende de la parte real de z, z'. Escribamos $z' = a' + ib'$ y sea $(r(t))_{t\in\mathbb{R}}$ parametrización por longitud de arco de algún rayo vertical, es decir $r(+\infty) = \infty$, digamos $[z''\infty)$ (ver figura 11). Si $z'' = a'' + ib''$, sea $(s(t))_{t\in\mathbb{R}}$ la parametrización por longitud de arco del rayo geodésico $[a'' + ib'\infty)$. Entonces existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ suficientemente grande, se tiene

$$r(t) = s(t + t_0).$$

De lo anterior,

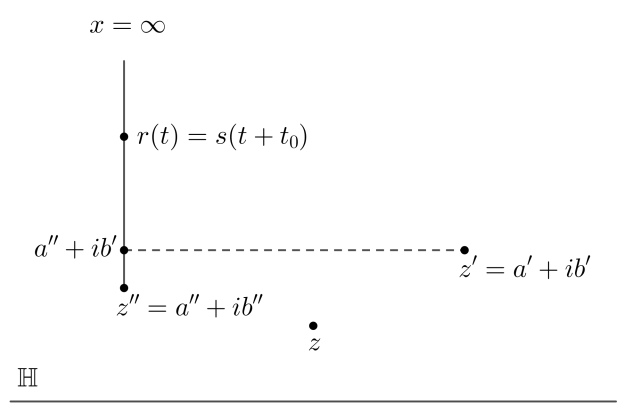


Figura 11: Independencia del Rayo Geodésico.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} d(z, r(t)) - d(z', r(t)) &= \lim_{t\to+\infty} d(z, s(t + t_0)) - d(z', s(t + t_0)) \\ &= \lim_{t\to+\infty} d(z, s(t)) - d(z', s(t)).\end{aligned}$$

Proposición 4.7. *Sea $x \in \mathbb{H}(\infty)$, $z, z', z'' \in \mathbb{H}$, $g \in G$. Entonces:*

(i) $B_x(z, z') = -B_x(z', z)$ *(Antisimetría),*

(ii) $B_{g(x)}(g(z), g(z')) = B_x(z, z')$ *(G-invarianza),*

(iii) $B_x(z,z') = B_x(z,z'') + B_x(z'',z')$ *(Propiedad de Cociclo),*

(iv) $|B_x(z,z')| \leqslant d(z,z')$,

(v) $B_x(z,z') = d(z,z') \Leftrightarrow z' \in [z,x)$.

Demostración. (i) Directo de la definición.

(ii) Sea $g \in G$. Denotemos por $(r(t))_{t\geqslant 0}$ la parametrización por longitud de arco del rayo geodésico $[g(z), g(x))$. Por definición, tenemos que

$$\begin{aligned} B_{g(x)}(g(z),g(z')) &= \lim_{t\to+\infty} d(g(z),r(t)) - d(r(t),g(z')) \\ &= \lim_{t\to+\infty} d(z,g^{-1}(r(t)) - d(g^{-1}(r(t)),z'). \end{aligned}$$

Notemos que g^{-1} lleva el rayo geodésico $[g(z), g(x))$ en el rayo geodésico $[z,x)$. Además, recordamos que G actúa en $\mathrm{T}^1\mathbb{H}$, de lo cual g^{-1} envía vectores unitarios en vectores unitarios. Así $(s(t))_{t\geqslant 0} = (g^{-1}(r(t)))_{t\geqslant 0}$ es la parametrización por longitud de arco del rayo geodésico $[z,x)$. Luego,

$$B_{g(x)}(g(z),g(z')) = \lim_{t\to+\infty} d(z,s(t)) - d(s(t),z') = B_x(z,z').$$

(iii) Sea $(r(t))_{t\geqslant 0}$ la parametrización por longitud de arco del rayo geodésico $[z'',x)$. Entonces la independencia del rayo geodésico implica que

$$\begin{aligned} B_x(z,z'') + B_x(z'',z') &= B_x(z'',z') - B_x(z'',z) \\ &= \lim_{t\to+\infty} d(z'',r(t)) - d(r(t),z') - d(z'',r(t)) + d(r(t),z) \\ &= \lim_{t\to+\infty} d(z,r(t)) - d(r(t),z') \\ &= B_x(z,z'). \end{aligned}$$

(iv) Si $(r(t))_{t\geqslant 0}$ es la parametrización por longitud de arco del rayo geodésico $[z,x)$, entonces

$$\begin{aligned} |B_x(z,z')| &= |\lim_{t\to+\infty} d(z,r(t)) - d(r(t),z')| \\ &\leqslant |\lim_{t\to+\infty} d(z,z') + d(z',r(t)) - d(r(t),z')| \\ &= d(z,z'). \end{aligned}$$

(v) Es claro que si $z' \in [z,x)$ y $(r(t))_{t\geqslant 0}$ es la parametrización por longitud de arco del rayo geodésico $[z,x)$, entonces existe $T \geqslant 0$ tal que $z' = r(T)$. Así, para $t \geqslant T$, se tiene que

$$d(z,r(t)) = d(z,z') + d(z',r(t)).$$

Luego

$$B_x(z,z') = \lim_{t\to+\infty} d(z,r(t)) - d(r(t),z') = d(z,z').$$

Recíprocamente, nos fijamos en el caso $z = ib$, z' otro punto en $\mathbb{H}$. Entonces $|B_\infty(z, z')| = d(z, i \operatorname{Im} z')$ por la invarianza de la función de Busemann en la recta horizontal $\operatorname{Im} w = \operatorname{Im} z'$. Además, si $B_\infty(z, z') = d(z, z')$, en particular $B_\infty(z, z')$ es positivo, de lo cual $B_\infty(z, z') = d(z, i \operatorname{Im} z')$, como muestra la figura 12. Recordemos que la bola hiperbólica $B_h(z, \ln b')$ de

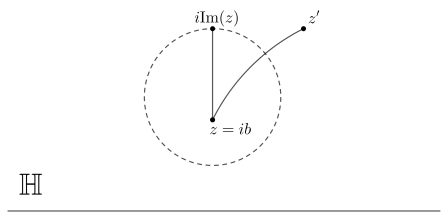


Figura 12:

centro z y radio $\ln b'$ es una bola euclideana cuyo centro está en el segmento $\overline{[z \operatorname{Im}(z)]}$. De lo anterior, si z' tiene parte real no nula, entonces $z' \notin B_h(z, \ln b')$, de lo cual $d(z, z') > d(z, i \operatorname{Im} z') = B_\infty(z, z')$.

□

Definición 4.8. *Llamamos horociclos y horobolas centradas en $x \in \mathbb{H}(\infty)$ a los conjuntos*

$$H_t(x) := \{z \in \mathbb{H} : B_x(i, z) = \ln t\} \text{ y } H_t^+(x) := \{z \in \mathbb{H} : B_x(i, z) \geqslant \ln t\},$$

respectivamente.

Observemos que si $x = \infty$, el conjunto $H_t(\infty)$ es una recta horizontal y $H_t^+(\infty)$ es el semiplano superior delimitado por esta recta. En efecto, $B_\infty(i, z) = \ln t$ sí, y sólo si, $d(i, i \operatorname{Im} z) = \ln t$, *i.e.*, $\operatorname{Im} z = t$.

Por otro lado, si $x \neq \infty$, tomamos $g \in G$ isometría tal que $g(\infty) = x$. Así

$$H_t(x) = g(H_{t'}(\infty)), t' = te^{-B(i, g(i))}.$$

Como consecuencia, cuando $x \neq \infty$ se tiene que el horociclo centrado en x es una circunferencia tangente a $\mathbb{H}(\infty)$ en el punto x, y la horobola centrada en x es el disco determinado por esta circunferencia (ver figura 13).

Como la función de Busemann centrada en ∞ entre z y z' en $\mathbb{H}$ no depende de la parte real de z ni de la parte real de z', podemos suponerlos de igual parte real. Por la propiedad (v), el módulo de la función de Busemann mide la distancia entre estos puntos, es decir, su valor es la distancia entre las, si $x \in \mathbb{H}(\infty)$ es cualquiera, el módulo de $B_x(z, z')$ mide la distancia entre el horociclo que pasa por z y el que pasa por z', como muestra la figura 14. Observemos que si $p(z) = z + b$, con $b \in \mathbb{R}$, entonces las rectas horizontales son preservadas por p. Esto es, p deja invariantes los horociclos centrados en ∞, el cual es fijo

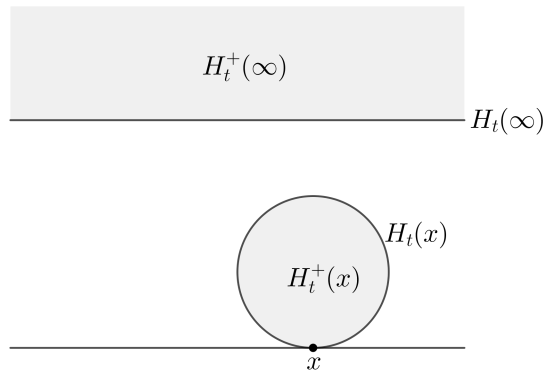


Figura 13: Horociclos y Horobolas.

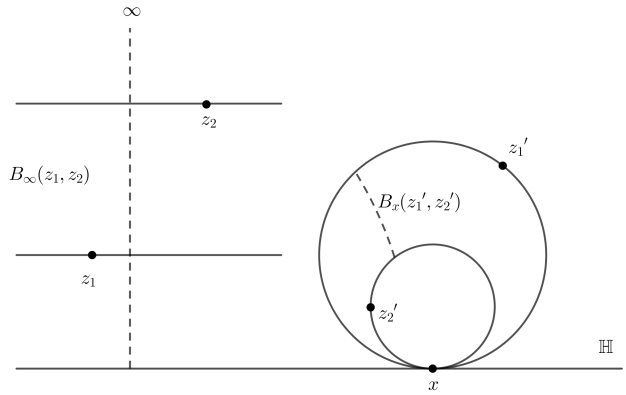


Figura 14: Función de Busemann como distancia entre horociclos.

para p. Sea ahora p' cualquier elemento parabólico fijando $x \in \mathbb{H}(\infty)$. Como p' es conjugado a p y los horociclos son enviados en otros horociclos a través de homografías (por la propiedad (ii) de la función de Busemann), se tiene que p' preserva los horociclos centrados en x.

4.4. Dinámica del flujo geodésico.

Definición 4.9. *Sea $v \in T^1\mathbb{H}$. Llamaremos variedad fuertemente estable del flujo geodésico en el punto v al subconjunto de $T^1\mathbb{H}$*

$$\widetilde{W}^{ss}(v) := \{w \in T^1\mathbb{H} : D(\tilde{g}_t(v), \tilde{g}_t(w)) \to 0, t \to +\infty\},$$

y variedad fuertemente inestable a

$$\widetilde{W}^{su}(v) := \{w \in T^1\mathbb{H} : D(\tilde{g}_{-t}(v), \tilde{g}_{-t}(w)) \to 0, t \to +\infty\}.$$

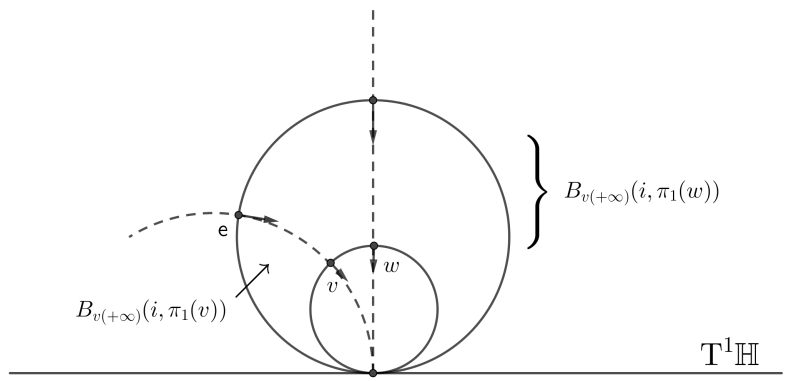


Figura 15: Variedad estable en un punto.

Denotemos por $\pi_1 : \mathrm{T}^1\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ a la proyección en la primera coordenada.

Proposición 4.10. *Sea $v \in T^1\mathbb{H}$. Entonces*

$$\widetilde{W}^{ss}(v) = \{w \in T^1\mathbb{H} : B_{v(+\infty)}(i, \pi_1(v)) = B_{v(+\infty)}(i, \pi_1(w)), v(+\infty) = w(+\infty)\},$$

Demostración. Procedemos por doble inclusión. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $v = (ib, (0,1))$, donde $(0,1) \in \mathrm{T}_{ib}\,\mathbb{H}$. Entonces el conjunto descrito en el enunciado son todos los $w = (z, \overrightarrow{w}) \in \mathrm{T}^1\mathbb{H}$ tal que $z \in H_b(\infty)$ y $\overrightarrow{w} = (0,1) \in \mathrm{T}_z\,\mathbb{H}$. Observemos que como $v(+\infty) = w(+\infty)$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $T \in \mathbb{R}$ tal que $d(v(t+s), w(t+s)) < \varepsilon$, para todo $s > T$. Sea

$$t_\varepsilon(t) = \text{ínf}\{T \in \mathbb{R} : d(v(t+s), w(t+s)) < \varepsilon, \forall s > T\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
D(\widetilde{g}_t(v), \widetilde{g}_t(w)) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-|s|} d(v(t+s), w(t+s)) ds \\
&= \int_{-\infty}^{t_\varepsilon(t)} e^{-|s|} d(v(t+s), w(t+s)) ds + \int_{t_\varepsilon(t)}^{+\infty} e^{-|s|} d(v(t+s), w(t+s)) ds \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{t_\varepsilon(t)} e^{-|s|} d(v(t+s), w(t+s)) ds + \varepsilon \int_{t_\varepsilon(t)}^{+\infty} e^{-|s|} ds \\
&= \int_{-\infty}^{t_\varepsilon(t)} e^{-|s|} d(v(t+s), w(t+s)) ds + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ahora observamos que cuando t tiende a $+\infty$, $t_\varepsilon(t)$ tiende a $-\infty$. Luego, si $t \to +\infty$, se tiene

$$D(\tilde{g}_t(v), \tilde{g}_t(w)) \leqslant \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, dicha distancia converge a cero. Luego $w \in \widetilde{W}^{ss}(v)$.

Por otro lado, sea $v = (ib, (0,1))$ como antes) y $w \in \mathrm{T}^1\mathbb{H}$ tal que $w(0) \notin H_b(\infty)$. Usando la propiedad (iii) de la función de Busseman, tenemos que

$$\begin{aligned}
D(\tilde{g}_t(v), \tilde{g}_t(w)) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-|s|} d(v(t+s), w(t+s)) ds \\
&\geqslant \int_{\mathbb{R}} e^{-|s|} B_\infty(v(t+s), w(t+s)) ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-|s|} (B_\infty(v(t+s), w(t+s)) + B_\infty(v(t), w(t)) + B_\infty(w(t), w(t+s))) ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-|s|} (2s + B_\infty(v(t), w(t))) ds \\
&= 2\int_{\mathbb{R}} e^{-|s|} s ds + B_\infty(v(t), w(t)) \int_{\mathbb{R}} e^{-|s|} ds \\
&= 2\left(\int_0^{+\infty} e^{-|s|} s ds + \int_0^{+\infty} e^{-|s|}(-s) ds\right) + B_\infty(v(t), w(t)) \int_{\mathbb{R}} e^{-|s|} ds \\
&= B_\infty(v(t), w(t))
\end{aligned}$$

Observemos que si $w(+\infty) = v(+\infty)$, entonces la función $B_\infty(v(t), w(t))$ es constante y positiva. Así,

$$D(\tilde{g}_t(v), \tilde{g}_t(w)) \geqslant B_\infty(v(t), w(t)) = ds > 0.$$

Supongamos ahora que $w(+\infty) = x \in \mathbb{H}(\infty), x \neq \infty$. Así, existe $T > 0$ suficientemente grande tal que $w(0) \in H^+_{\mathrm{Im}(v(t))}$, para todo $t > T$ (ver figura 16).

Entonces, para $t > T$, se tiene que $B_\infty(v(t), w(t)) > t$. Luego, cuando $t \to +\infty$, tenemos que $D(\tilde{g}_t(v), \tilde{g}_t(w)) \to +\infty$. $\square$

Notemos que si $v(+\infty) = \infty$, la condición $w(+\infty) = \infty$ es equivalente a decir que $\overrightarrow{w}$ sea ortogonal al horociclo $H_{\mathrm{Im}(z)}(\infty)$. Así, cuando $x \neq \infty$, como la aplicación $g \in G$ que lleva ∞ en x es conforme, la variedad fuertemente estable se describe como el conjunto de puntos $(z', \overrightarrow{w}) \in \mathrm{T}^1\mathbb{H}$ tales que z' está en el mismo horociclo centrado en x que z y $\overrightarrow{w}$ es un vector perpendicular a esta circunferencia, apuntando hacia adentro.

Utilizando el hecho de que la variedad fuertemente inestable para el flujo geodésico corresponde a la variedad fuertemente estable del flujo geodésico con la orientación invertida $(g_{-t})_{t\in\mathbb{R}}$, deducimos que

$$\widetilde{W}^{su}(v) = \{w \in \mathrm{T}^1\mathbb{H} : B_{v(-\infty)}(i, \pi_1(v)) = B_{(-\infty)}(i, \pi_1(w)), v(-\infty) = w(-\infty)\}.$$

Ahora que ya sabemos cómo son las variedades fuertemente estable e inestable respectivamente en $\mathrm{T}^1\mathbb{H}$, estamos interesados en cómo esta información nos es útil al observar la dinámica del flujo en el cociente $\mathrm{T}^1\mathbb{H}/\Gamma$.

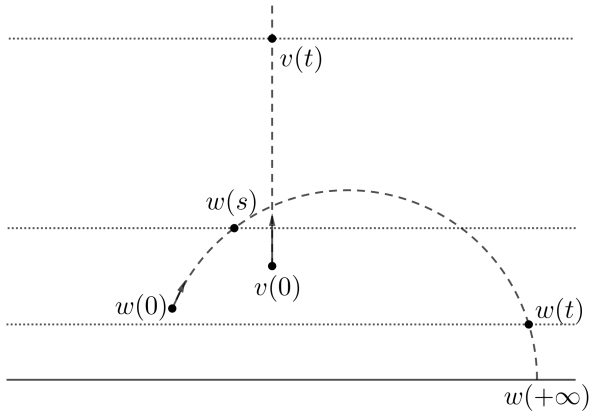


Figura 16:

Denotemos por W^{ss} a la variedad fuertemente estable para el flujo geodésico en el cociente $\mathrm{T}^1\mathbb{H}/\Gamma$ y W^{su} a la variedad fuertemente inestable. Esto es,

$$W^{ss}(\pi^1(v)) := \{\pi^1(w) \in \mathrm{T}^1\mathbb{H}/\Gamma : D(g_t(\pi^1(v)), g_t(\pi^1(w))) \to 0, t \to +\infty\},$$

$$W^{su}(\pi^1(v)) := \{\pi^1(w) \in \mathrm{T}^1\mathbb{H}/\Gamma : D(g_{-t}(\pi^1(v)), g_{-t}(\pi^1(w))) \to 0, t \to +\infty\}.$$

Proposición 4.11. $W^{ss}(\pi^1(v)) \supseteq \pi^1(\widetilde{W}^{ss}(v))$, $W^{su}(\pi^1 v) \supseteq \pi^1(\widetilde{W}^{su}(v))$.

5. Mixing del flujo geodésico

En esta sección estudiaremos las propiedades de mixing del flujo geodésico en superficies hiperbólicas que tengan volumen finito. Para esto, primero requeriremos algunos preliminares de sistemas dinámicos topológicos y de sistemas dinámicos medibles.

5.1. Previos dinámicos

Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida y $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un flujo definido sobre X. La medida μ se dice que es *φ_t-invariante* si

$$\mu(\varphi_t(A)) = \mu(A), \forall t \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathscr{A}.$$

Definición 5.1. *Supongamos que μ es φ_t-invariante. Diremos que el flujo $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ es mixing respecto a la medida μ si para todo par de conjuntos medibles $A, B \in \mathscr{A}$ de X,*

$$\lim_{t\to\infty} \mu(\varphi_t(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Proposición 5.2. *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida, $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un flujo sobre X. Son equivalentes:*

(i) $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *es mixing respecto a* μ.

(ii) Si $F, G \in L^2(\mu)$,

$$\lim_{t\to\infty} \int_X F \cdot (G \circ \varphi_t) d\mu = \left(\int_X F d\mu\right)\left(\int_X G d\mu\right).$$

Demostración. Para probar que (ii) implica (i) basta tomar las funciones características en A y en B respectivamente. Recíprocamente se puede obtener (ii) de (i) siempre que F y G son funciones escalonadas. El resultado se sigue de la densidad de tales funciones y la continuidad de la aplicación $G \to G \circ \varphi_t$. □

Recordemos que un flujo $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ definido sobre un espacio topológico X es *topológicamente mixing* si para cada par de abiertos U, V, existe $T > 0$ tal que

$$\varphi_t(U) \cap V \neq \varnothing, \forall t > T.$$

Lema 5.3. *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida tal que μ asigna medida positiva a los abiertos de X. Supongamos que $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ es un flujo tal que μ es φ_t-invariante. Entonces si $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ es mixing respecto a μ, es topológicamente mixing.*

Demostración. Sean U, V abiertos, los cuales son medibles y tienen medida positiva. Del mixing en medida, $\lim_{t\to+\infty} \mu(\varphi_t(U) \cap V) = \mu(U)\mu(V) > 0$, de lo cual existe $T > 0$ tal que $\mu(\varphi_t(U) \cap V) > 0$ para todo $t > T$ y así $\varphi_t(U) \cap V \neq \varnothing$, para todo $t > T$. □

5.2. Superficies hiperbólicas como espacios de medida

En esta subsección dotaremos a $\mathrm{T}^1\mathbb{H}/\Gamma$ de una medida finita y boreliana, para más tarde mostrar que el flujo geodésico es mixing para esta medida. Recordamos entonces que tenemos una identificación de $\mathrm{T}^1\mathbb{H}$ con $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ y a éste último le otorgamos una medida para luego proyectarla en el cociente. Para esto, recordamos los subgrupos K, A y N del grupo de isometrías definidos en la Sección 2 por

$$K = \left\{k(z) = \tfrac{z\cos\theta - \sin\theta}{z\sin\theta + \cos\theta} : \theta \in \mathbb{R}\right\}.$$

$$A = \{a(z) = tz : t \in \mathbb{R}^+\}.$$

$$N = \{n(z) = z + b : b \in \mathbb{R}\}.$$

Estos subgrupos nos otorgan la descomposición de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = KAN,$$

llamada *descomposición de Iwasawa*. Más precisamente, se tiene la siguiente proposición.

Proposición 5.4. *La aplicación*

$$\begin{array}{rcl} K \times A \times N & \to & \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \\ (k, a, n) & \mapsto & kan \end{array}$$

es difeomorfismo.

Demostración. La diferenciabilidad es clara de la definición. Sea $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ y $\{e_2, e_2\}$ base canónica de $\mathbb{R}^2$. Observemos que la base canónica determina un paralelógramo de área 1 y como g tiene determinante 1, también $\{ge_1, ge_2\}$ es base de $\mathbb{R}^2$ y determina un paralelógramo de área 1.

Afirmamos que hay una correspondencia biunívoca entre las bases orientadas positivamente de $\mathbb{R}^2$ que determinan un paralelógramo de área 1 y el grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ de matrices con determinante 1. En efecto, tomamos $\{v, w\}$ base orientada positivamente de $\mathbb{R}^2$ que forma paralelógramo de área 1. Mediante un elemento $k^{-1} \in K$, es posible rotar el palalelógramo de modo que $k^{-1}v = t \cdot e_1$. Tomando $a^{-1} \in A$ dada por $a^{-1}(z) = t^{-1}z$, tenemos que $\{e_1, a^{-1}k^{-1}w\}$ es base (positivamente orientada) y determina un paralelógramo de área 1. Finalmente, si $a^{-1}k^{-1}w = (x, y)$, aplicamos $n^{-1} \in N$ definido por $n^{-1}(z) = z - x$.

Con lo anterior, $n^{-1}a^{-1}k^{-1}g(e_i) = e_i$, para $i = 1, 2$. Así, $n^{-1}a^{-1}k^{-1}g = id$ y entonces $g = kan$.

Para probar la unicidad de la correspondencia, supongamos que $k_1a_1n_1 = k_2a_2n_2$, donde $k_1, k_2 \in K$, $a_1, a_2 \in A$ y $n_1, n_2 \in N$. Entonces $k_2^{-1}k_2 = a_2n_2n_1^{-1}a_1^{-1}$. Como la acción de A y de N preserva el eje real y su orientación, entonces $k_2^{-1}k_1$ también preserva el eje y su orientación. Luego $k_2^{-1}k_1 = id$, de lo cual $k_2 = k_1$. Luego $a_2^{-1}a_1 = n_2n_1^{-1}$, pero tanto A como N son cerrados bajo el producto y además $A \cap N = id$. Así $a_1 = a_2$ y $n_1 = n_2$.

Queda como ejercicio para el lector verificar que esta aplicación es un difeomorfismo local y como es biyectiva es difeomorfismo global. $\square$

Con la Proposición 5.4 en mente, basta dotar a los subgrupos K, A y N de medidas σ-finitas borelianas para luego tomar la medida producto como medida de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Como cada uno de los subgrupos es a un parámetro real y en $\mathbb{R}$ tenemos la medida de Lebesgue, consideramos las aplicaciones

$$\begin{array}{rcl} \psi_1 : K & \to & \mathbb{R}, \\ k_\theta & \mapsto & \theta \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \psi_2 : A & \to & \mathbb{R}^+, \\ a_t & \mapsto & \ln t \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \psi_3 : N & \to & \mathbb{R}, \\ n_b & \mapsto & b \end{array}$$

donde $k_\theta(z) = \frac{z\cos\theta - \sin\theta}{z\sin\theta + \cos\theta}$, $a_t(z) = tz$ y $n_b(z) = z + b$.

Así, tomando en $\mathbb{R}$ la medida de Lebesgue $\mathscr{L}$, consideramos $\mu_K(C_1) = \mathscr{L}(\psi_1(C_1))$, $\mu_A(C_2) = \mathscr{L}(\psi_2(C_2))$ y $\mu_N(C_3) = \mathscr{L}(\psi_3(C_3))$, donde para cada $i = 1, 2, 3$, $C_i \in \psi^{-1}(C)$, para algún C medible.

Definimos

$$d\widetilde{\mu} = d\mu_K d\mu_A d\mu_N = \frac{1}{t} d\theta dt db$$

medida σ-finita en $K \times A \times N$ y así sobre $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Basta observar la invarianza de $\widetilde{\mu}$ por K, A y N para concluir lo siguiente.

Proposición 5.5. *La medida $\widetilde{\mu}$ es $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$-invariante.*

Sea $p : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ la proyección natural. En $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tomamos la imagen de la medida $\widetilde{\mu}$ a través de la proyección, es decir, para todo conjunto C con $p^{-1}(C)$ medible en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, se define

$$m(C) = \widetilde{\mu}(p^{-1}(C)),$$

la cual sigue siendo σ-finita.

Con todo lo anterior, tenemos en $\mathrm{T}^1\mathbb{H}$ una medida σ-finita. Sea Γ un grupo fuchsiano, entonces la medida m pasa a $\mathrm{T}^1\mathbb{H}/\Gamma$ de forma similar que con la proyección a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, salvo que tomamos las preimágenes que intersectan al dominio fundamental de la acción del subgrupo Γ. Más precisamente, tomemos $\pi^1 : \mathrm{T}^1\mathbb{H} \to \mathrm{T}^1\mathbb{H}/\Gamma$ la proyección natural definida en la Sección 4.2 y $C \subset \mathrm{T}^1\mathbb{H}/\Gamma$ es tal que $\pi^{-1}(C)$ es medible. Inducimos en $\mathrm{T}^1\mathbb{H}/\Gamma$ una medida μ desde m definiéndola por

$$\mu(C) = m((\pi^1)^{-1}(C) \cap D),$$

donde D es un dominio fundamental de la acción de Γ sobre $\mathrm{T}^1\mathbb{H}$. Esta medida no depende de D, de lo cual es G-invariante.

Definición 5.6. *Sea Γ un grupo fuchsiano. Diremos que la superficie hiperbólica $T^1\mathbb{H}/\Gamma$ es de volumen finito si la medida μ es es finita.*

De manera equivalente, $\mathrm{T}^1\mathbb{H}/\Gamma$ se dice de volumen finito si el dominio de dirichlet de la acción de Γ sobre $\mathrm{T}^1\mathbb{H}$ es de medida finita.

5.3. Mixing topológico del flujo geodésico

Sea $X = \mathrm{T}^1\mathbb{H}/\Gamma$ una superficie hiperbólica de volumen finito. Recordemos que el flujo geodésico $g_t : X \to X$ actúa de forma matricial por multiplicación

por la derecha como fue descrito en la Sección 4.1. Definimos también el flujo horocíclico contractante h_s^+ y el flujo horocíclico dilatante h_u^- respectivamente por

$$h_s^+(M) = M\begin{pmatrix}1 & s\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad h_u^-(M) = M\begin{pmatrix}1 & 0\\ u & 1\end{pmatrix}.$$

Definición 5.7. *Diremos que una sucesión* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2$ converge débilmente *a* $\overline{F} \in L^2$ *si para toda* $G \in L^2$,

$$\langle F_n, G\rangle \to \langle \overline{F}, G\rangle, n \to +\infty.$$

Denotamos esto por $F_n \rightharpoonup \overline{F}$.

Observación 5.8. *Si* $F, G \in L^2(\mu)$,

$$\int_X F\circ G d\mu = \int_X F(G(x))d\mu(x) = \int_{G^{-1}(X)} F(y)d\mu(G^{-1}(y)).$$

De lo anterior, si μ *es* G*-invariante,*

$$\int_X F\circ G d\mu = \int_X F d\mu.$$

Proposición 5.9. *Sea* $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *un flujo definido sobre un espacio de probabilidad* $(X, \mathscr{A}, \mu)$. *Son equivalentes:*

(i) El flujo $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *es mixing respecto a* μ.

(ii) Para toda $F \in L^2(\mu)$ *de integral nula,* $F\circ g_t \to 0$ *cuando* $t \to \infty$.

(iii) Para toda $F \in L^2(\mu)$ *de integral nula, el único punto de acumulación débil de* $(F\circ g_t)_{t>0}$ *es* 0.

Demostración. Es claro que (i) implica (ii) y que (ii) implica (iii). Que (iii) implica (ii) es consecuencia del Teorema de Banach Alaoglu, pues los conjuntos acotados son débilmente secuencialmente compactos y $||F\circ\varphi_t|| = ||F||$ por la Observación 5.8. Para ver que (ii) implica (i), tomemos $F, G \in L^2$. Sea $M = \{H \in L^2 : \int_X H d\mu = 0\}$. No es difícil ver que $M^\perp$ es el espacio de funciones constantes y así, escribiendo $F = F_1 + F_2$, con $F_1 \in M$ y $F_2 \in M^\perp$, tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\int_X F\cdot(G\circ\varphi_t)d\mu &= \lim_{t\to\infty}\langle F, G\circ\varphi_t\rangle\\ &= F_2\int_X G\circ\varphi_t d\mu\\ &= \left(\int_X F_2 d\mu\right)\left(\int_X G d\mu\right).\end{aligned}$$

□

Lema 5.10. *Sea $F \in L^2(\mu)$. Entonces todos los puntos de acumulación débiles de $(F \circ g_t)_{t>0}$ son h_s^+-invariantes y los de $(F \circ g_t)_{t<0}$ son h_u^--invariantes. En particular, toda función invariante por g_t es invariante por h_s^+ y por h_u^-.*

Demostración. Sea $\overline{F} \in L^2$ y $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sucesión creciente no acotada de modo que $F \circ g_{t_i} \rightharpoonup \overline{F}$. Es fácil verificar que $g_t \circ h_s^+ = h^+_{se^{-t}} \circ g_t$. Así, usando la Observación 5.8 obtenemos

$$||F \circ g_t \circ h_s^+ - F \circ g_t|| = ||F \circ h^+_{se^{-t}} \circ g_t - F \circ g_t|| = ||F \circ h^+_{se^{-t}} - F|| \to 0, t \to \infty.$$

Por otro lado, como $F \circ g_{t_i} \rightharpoonup \overline{F}$, se tiene que

$$F \circ g_{t_i} \circ h_s^+ - F \circ g_{t_i} \rightharpoonup \overline{F} \circ h_s^+ - \overline{F}.$$

Esto implica que $||F \circ g_{t_i} \circ h_s^+ - F \circ g_{t_i}|| \to ||\overline{F} \circ h_s^+ - \overline{F}||, i \to \infty$, pero también $||F \circ g_{t_i} \circ h_s^+ - F \circ g_{t_i}|| \to 0, i \to \infty$. Por lo tanto $\overline{F} \circ h_s^+ - \overline{F} \equiv 0$ y así $\overline{F}$ es invariante por h_s^+.

De manera similar, se verifica que $g_{-t} \circ h_u^- = h^-_{ue^{-t}} \circ g_{-t}$. Para probar la segunda afirmación, tomamos $\overline{F} \in L^2$ y $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tales que $t_j \to \infty$ cuando $j \to \infty$, de modo que $F \circ g_{-t_j} \rightharpoonup \overline{F}$. Con lo anterior, $||F \circ g_{-t_j} \circ h_u^- - F \circ g_{-t_j}|| \to 0$ y además $||F \circ g_{-t_j} \circ h_u^- - F \circ g_{-t_j}|| \to ||\overline{F} \circ h_u^- - \overline{F}||$, cuando $i \to \infty$. Esto implica la segunda afirmación.

Finalmente, si $\overline{F} \in L^2$ es g_t-invariante, entonces $\overline{F} \circ g_t = \overline{F}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Luego $\overline{F}$ es punto de acumulación de $(\overline{F} \circ g_t)_{t>0}$ y de $(\overline{F} \circ g_t)_{t<0}$, de lo cual es invariante por h_s^+ y por h_u^-. □

Lema 5.11. *Sea $F \in L^2(\mu)$ una función h_s^+ invariante. Entonces F es g_t-invariante.*

Demostración. Sea $\overline{F} \in L^2$. Para todo $\varepsilon, \delta > 0$, $h^+_{\frac{\delta^{-1}-1}{\varepsilon}} \circ h^-_\varepsilon \circ h^+_{\frac{\delta-1}{\varepsilon}} \circ h^-_{\frac{-\varepsilon}{\delta}} = g_{2\ln\delta}$. Luego, haciendo $t = 2\ln\delta$,

$$\begin{aligned}
||F \circ g_t - F|| &= ||F \circ g_{2\ln\delta} - F|| \\
&= ||F \circ h^+_{\frac{\delta^{-1}-1}{\varepsilon}} \circ h^-_\varepsilon \circ h^+_{\frac{\delta-1}{\varepsilon}} \circ h^-_{\frac{-\varepsilon}{\delta}} - F|| \\
&= ||F \circ h^-_\varepsilon \circ h^+_{\frac{\delta-1}{\varepsilon}} \circ h^-_{\frac{-\varepsilon}{\delta}} - F|| \\
&= ||F \circ h^-_\varepsilon \circ h^+_{\frac{\delta-1}{\varepsilon}} \circ h^+_{\frac{-\varepsilon}{\delta}} - F \circ h^+_{\frac{\delta-1}{\varepsilon}} \circ h^+_{\frac{-\varepsilon}{\delta}} + F \circ h^+_{\frac{\delta-1}{\varepsilon}} \circ h^-_{\frac{-\varepsilon}{\delta}} - F|| \\
&= ||F \circ h^-_\varepsilon \circ h^+_{\frac{\delta-1}{\varepsilon}} \circ h^+_{\frac{-\varepsilon}{\delta}} - F \circ h^+_{\frac{\delta-1}{\varepsilon}} \circ h^-_{\frac{-\varepsilon}{\delta}} + F \circ h^-_{\frac{-\varepsilon}{\delta}} - F|| \\
&\leqslant ||F \circ h^-_\varepsilon \circ h^+_{\frac{\delta-1}{\varepsilon}} \circ h^+_{\frac{-\varepsilon}{\delta}} - F \circ h^+_{\frac{\delta-1}{\varepsilon}} \circ h^-_{\frac{-\varepsilon}{\delta}}|| + ||F \circ h^-_{\frac{-\varepsilon}{\delta}} - F|| \\
&= ||F \circ h^-_\varepsilon - F|| + ||F \circ h^-_{\frac{\varepsilon}{\delta}} - F||.
\end{aligned}$$

Utilizando el Teorema de Convergencia Dominada concluimos la convergencia $||F \circ g_t - F|| \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se tiene que $\mu - c.t.x \in X$, $F(g_t(x)) = F(x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. □

Observación 5.12. *Sea $F \in L^2$ y $\overline{F} \in L^2$ punto de acumulación débil de $(F \circ g_t)_{t>0}$. Entoces existe $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente no acotada de reales tal que $(F \circ g_{t_i})_{i\in\mathbb{N}} \rightharpoonup \overline{F}$.*

Supongamos además que F tiene integral nula. Entonces para $G \equiv 1$, se tiene que $\langle \overline{F}, 1\rangle = \lim_{i\to\infty} \langle F \circ g_{t_i}, 1\rangle$. Esto es,

$$\int_X \overline{F} d\mu = \lim_{i\to\infty} \int_X F \circ g_{t_i} d\mu = 0.$$

Observación 5.13. *Sea $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ asociada a la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad-bc = 1$.*

Supongamos que $d \neq 0$. Entonces tomando $t = -2\ln d$, $u = cd$ y $s = \frac{b}{d}$, se tiene que $g = g_t \circ h_u^- \circ h_s^+$.

Notemos además que como la medida sobre cada coeficiente es la de Lebesgue, tales g con $d \neq 0$ tienen medida total en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Teorema 5.14. *El flujo geodésico sobre X es mixing para la medida μ.*

Demostración. Sea $F \in L^2$ de integral nula. Basta probar que el único punto de acumulación débil de $(F \circ g_t)_{t>0}$ es 0.

Sea $\overline{F} \in L^2$ y $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente no acotada de reales tal que $(F \circ g_{t_i}) \rightharpoonup \overline{F}$. Por el Lema 5.10 se tiene que $\overline{F}$ es h_s^+-invariante y del Lema 5.11 es g_t-invariante. Utilizando nuevamente el Lema 5.10 se tiene que $\overline{F}$ es invariante por los tres flujos. Como casi todo elemento de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ se obtiene como composición de estos tres flujos, obtenemos que $\overline{F}$ es $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$-invariante. Luego

$$\tilde{\mu} - c.t.g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}), \mu - c.t.x \in X, \overline{F}(gx) = \overline{F}(x).$$

Entonces $|\overline{F} \circ g - \overline{F}|$ es nula en un subconjunto de X de medida total. Así, $\tilde{\mu} - c.t.g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ se tiene

$$\int_X |\overline{F} \circ g - \overline{F}| d\mu = 0.$$

Utilizando el teorema de Fubini se tiene que

$$0 = \int_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})} \int_X |\overline{F} \circ g - \overline{F}| d\mu d\tilde{\mu} = \int_X \int_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})} |\overline{F} \circ g - \overline{F}| d\tilde{\mu} d\mu.$$

Entonces $\mu - c.t.x \in X$, $\int_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})} |\overline{F} \circ g - \overline{F}| d\tilde{\mu} = 0$ y así

$$\mu - c.t.x \in X, \tilde{\mu} - c.t.g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}), \overline{F}(gx) = \overline{F}(x).$$

En particular, existe $x_0 \in X$ tal que $\tilde{\mu} - c.t.g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, $\overline{F}(gx) = \overline{F}(x)$. Como la acción de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ es transitiva, esto implica que $\overline{F}$ es constante $\mu - c.t.x \in X$. Finalmente, como F tiene integral nula, se sigue que $\overline{F}$ también tiene integral nula y además constante, de lo cual $\overline{F}$ es en casi todo punto la función nula.

□

Corolario 5.15. *El flujo geodésico sobre X es topológicamente mixing.*

5.4. Comentario final

A pesar de que en estas notas nos centramos en el caso de superficies hiperbólicas de volumen finito, es posible probar el mixing topológico del flujo geodésico con mayor generalidad. En 1986 Guivarc'H generalizó este resultado demostrando el mixing en superficies con curvatura seccional constante negativa [GR]. Este resultado también se aplica en dimensión mayor. En 1998 Dal'Bo y Peigné probaron que en cualquier dimensión y cualquier curvatura, si Γ posee elementos parabólicos se tiene el mixing topológico del flujo geodésico [DP]. Un año más tarde, Dal'Bo también demostró que la propiedad de mixing satisface en superficies con curvatura variable [D1]. En el año 2000, Dal'Bo probó una caracterización para el mixing topológico en el caso general [D2]. Para ser más precisos, el mixing topológico es equivalente a la existencia de una hoja densa de la foliación fuertemente estable del flujo, la cual a su vez es equivalente a la no-aritmeticidad del subgrupo de isometrías que determinan la variedad. Esta caracterización da herramientas para resolver el problema del mixing topológico en el caso general. Una de estas herramientas es dinámica, otra es geométrica y la otra es topológica.

El caso general (curvatura variable, cualquier dimnsión) es un problema abierto a la fecha.

Índice de Notaciones	
$\rightharpoonup$	Convergencia Débil,**35**
B	Función de Busemann, **25**
D	Distancia sobre $\mathrm{T}^1\mathbb{H}$, **19**
D_Γ	Distancia sobre $\mathrm{T}^1\mathbb{H}/\Gamma$, **22**
d	Distancia sobre $\mathbb{H}$, **9**
e	Identidad en $\mathrm{T}^1\mathbb{H}$, **19**
G	Grupo de Isometrás de $\mathbb{H}$, **7**
$(\mathsf{g}_z)_z$	Métrica riemanniana sobre $\mathbb{H}$, **8**
$(\mathsf{g}_z^{\mathbb{D}})_z$	Métrica riemanniana sobre $\mathbb{D}$, **12**
$(\widetilde{g}_t)_{t\in\mathbb{R}}$	Flujo geodésico en $\mathrm{T}^1\mathbb{H}$, **20**
$(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$	Flujo geodésico en $\mathrm{T}^1\mathbb{H}/\Gamma$, **23**
$\widehat{\mathbb{H}}$	Compactificación de $\mathbb{H}$, **9**
$H_t(x)$	Horociclo centrado en x, **27**
$H_t^+(x)$	Horobola centrada en x, **27**
$(h_s^+)_{s\in\mathbb{R}}$	Flujo horocíclico contractante, **35**
$(h_u^-)_{u\in\mathbb{R}}$	Flujo horocíclico dilatante, **35**
m	Medida sobre $\mathrm{T}^1\mathbb{H}$, **34**
$\widetilde{\mu}$	Medida sobre $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, **34**
μ	Medida sobre $\mathrm{T}^1\mathbb{H}/\Gamma$, **34**
Ω	Conjunto no-errante, **21**
π	Proyección de $\mathbb{H}$ sobre $\mathbb{H}/\Gamma$, **15**
π_1	Proyección de $\mathrm{T}^1\mathbb{H}$ sobre $\mathbb{H}$, **29**
π^1	Proyección de $\mathrm{T}^1\mathbb{H}$ sobre $\mathrm{T}^1\mathbb{H}/\Gamma$, **22**
$\mathrm{T}^1\mathbb{H}$	Fibrado unitario tangente de $\mathbb{H}$, **8**
$\mathrm{tr}(g)$	Traza de g, **11**
$(u(t))_{t\in\mathbb{R}}$	Parametrización por long. de arco de la única geodésica determinada por u, **19**
$\widetilde{W}^{ss}(v)$	Variedad fuertemente estable en v para $(\widetilde{g}_t)_{t\in\mathbb{R}}$, **28**
$W^{ss}(v)$	Variedad fuertemente estable en v para $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$, **31**
$\widetilde{W}^{su}(v)$	Variedad fuertemente inestable en v para $(\widetilde{g}_t)_{t\in\mathbb{R}}$, **28**
$W^{su}(v)$	Variedad fuertemente estable en v para $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$, **31**
$(x \quad y)$	Geodésica entre x e y, **10**

Referencias

[BE] Riccardo Benedetti and Carlo Petronio, *Lectures on Hyperbolic Geometry.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992.

[BR] Haim Brezis *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer Science and Business Media, 2010.

[CO] Yves Coudene, *On Invariant Distributions and Mixing.* Ergodic Theory and Dynamical Systems, 27(1), 109-112, 2007.

[CO] Yves Coudene. *Sur le Mĺange du Flot Géodésique*, 2011.

[D1] Françoise Dal'Bo, *Remarques sur le spectre des longueurs d'une surface et comptages.* Bol. Soc. Bras. Math., Vol. 30, n 2 (1999).

[D2] Françoise Dal'Bo, *Topologie du feuilletage fortement stable.* Annales de l'institut Fourier, Tome 50 (2000) no. 3 , p. 981-993.

[D3] Françoise Dal'Bo, *Trajectoires Géodésiques et Horocycliques.* EDP Sciences, CNRS Éditions, 2007.

[DP] Françoise Dal'Bo, Marc Peigné, *Some negatively curved manifolds with cusps, mixing and counting.* J. reine angew Math., 497 (1998), 141-169.

[EI] Manfred Einsiedler and Thomas Ward, *Ergodic Theory.* Springer-Verlag, 2011.

[GR] Yves Guivarc'H and Albert Raugi, *Products of random matrices: convergente theorem.* Contemp. Math. Vol. 50 (1986), 31-53.

[KA] Svetlana Katok, *Fuchsian Groups.* Chicago Lectures in Mathematics Series, 1992.

[TH] William P. Thurston, *The Geometry and Topology of Three-Manifolds.*