

ETUDE DE LA CATEGORIE DES ALGEBRES DE HOPF
COMMUTATIVES CONNEXES SUR UN CORPS

Colette Schoeller

Let k be a perfect field of characteristic $p \neq 0$; the category \mathcal{H} of connected abelian Hopf algebras over k is abelian and locally noetherian. Technics of locally noetherian categories are used here to obtain Krull and homological dimensions of \mathcal{H} (which are respectively 1 and 2), and a decomposition of \mathcal{H} in a product of categories. First we have $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}^- \times \mathcal{H}^+$, where \mathcal{H}^- is the category of Grassman algebras, and \mathcal{H}^+ consists of Hopf algebras which are zero in odd degrees; then we prove that \mathcal{H}^+ itself is a product of isomorphic categories \mathcal{H}_n , $n \in \mathbb{N}^*$, and we give an equivalence between \mathcal{H}_n and a category of n modules. This is compared to some results of algebraic geometry about Greenberg modules.

Etant donné un corps commutatif k , nous appellerons algèbre de Hopf sur k toute algèbre de Hopf commutative, connexe sur k [5]; un tel objet H est donc un espace vectoriel gradué $H = \sum_{n \in \mathbb{N}} H_n$, avec $H_0 \cong k$, muni d'une multiplication $\mu: H \otimes H \rightarrow H$, et d'une comultiplication $\Delta: H \rightarrow H \otimes H$, associatives et anticommutatives, avec unité et counité, telles que Δ soit un homomorphisme d'algèbres graduées. Nous étudions la catégorie \mathcal{H} de ces algèbres de Hopf en rappelant, dans une première partie, certains résultats connus sans donner toutes les démonstrations. Dans les n° 2 et 3 nous utilisons différents exercices proposés par P. Gabriel [2] pour démontrer, notamment, que, lorsque la caractéristique de k est non nulle, la dimension homologique de \mathcal{H} est 2 (et non 1 comme il est dit dans [7]). Les méthodes utilisées sont élémentaires (algèbres de Hopf et catégories localement noethériennes) et ne font pas intervenir les techniques de la géométrie algébrique.

Je remercie P. Gabriel pour ses conseils au cours de la mise au point de ce travail.

1. Généralités

1.1. Reprenant les notations de [5], si H est une algèbre de Hopf et si $I(H) = \sum_{n>0} H_n$, nous posons $Q(H) = I(H)/I(H)^2$. Un morphisme $h: K \rightarrow H$ de \mathbb{H} est un épimorphisme si et seulement si l'application induite $Q(h): Q(K) \rightarrow Q(H)$ est surjective [6]. Nous dirons que H est de type fini si elle l'est en tant qu'algèbre, i.e. si $[Q(H):k] < +\infty$; de même, H est réflexive si $[H_n:k] < +\infty$ pour tout n . Lorsque H est réflexive, nous désignons par H^* l'algèbre de Hopf duale (multiplication et comultiplication de H induisent sur H^* une structure d'algèbre de Hopf [5]). Toute algèbre de Hopf est limite inductive de ses sous-algèbres réflexives [5].

Les algèbres de Hopf H telles que $H_n = 0$ pour n impair forment une sous-catégorie pleine \mathbb{H}^+ de \mathbb{H} ; de même les algèbres de Hopf H telles que $Q(H)_n = 0$ pour n pair forment une sous-catégorie pleine \mathbb{H}^- de \mathbb{H} .

Nous désignerons par ${}_n E$, ${}_n L$, ${}_n S$ les algèbres de Hopf suivantes:

- ${}_n E$ est l'algèbre extérieure à un générateur x de degré $2n+1$, avec $\Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x$;

- ${}_n L$ est l'algèbre $k[x]$ des polynômes en une variable x de degré $2n$, avec $\Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x$;

- Lorsque $\text{car } k = p \neq 0$, on pose ${}_n S = {}_n L / (x^p)$.

Pour tout $H \in \mathbb{H}$, nous posons $P_n(H) = \{x \in H_n \mid \Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x\}$ pour tout $n > 0$ et $P(H) = \sum_{n>0} P_n(H)$. Les éléments de $P(H)$ sont dits primitifs. Un morphisme $h: K \rightarrow H$ de \mathbb{H} est un monomorphisme si et seulement si l'application induite $P(h): P(K) \rightarrow P(H)$ est injective [6]. Enfin on a $P_{2n}(H) \cong \text{Hom}_{\mathbb{H}}({}_n L, H)$ pour tout $n > 0$.

Si $[Q(H):k] = 1$, alors H est soit de type ${}_n E$, soit un quotient d'une algèbre de type ${}_n L$. En effet, soit y un relèvement dans H d'un élément non nul de $Q(H)$, y est primitif car de degré minimal dans $I(H)$. Si $\partial^\circ y = 2n+1$ on définit un morphisme $f: {}_n E \rightarrow H$ de \mathbb{H} en posant $f(x) = y$; ce morphisme est surjectif (puisque'il l'est comme morphisme d'algèbres), il est injectif, c'est donc un isomorphisme de \mathbb{H} (confer 1.2.). De même, si $\partial^\circ y = 2n$ on définit un morphisme surjectif $g: {}_n L \rightarrow H$ de \mathbb{H} en posant $g(x) = y$.

1.2. Les monomorphismes de \mathbb{H} sont les morphismes injectifs ; les épimorphismes sont les morphismes surjectifs .

Si $f : H \rightarrow K$ est un épimorphisme, alors $Q(f) : Q(H) \rightarrow Q(K)$ est une surjection, donc f en est une .

Si f est un monomorphisme, alors $P(f) : P(H) \rightarrow P(K)$ est une injection. Supposons que $E = \{x \in H \mid f(x) = 0\}$ soit non vide ; si x est un élément de degré n minimal dans E , x n'est pas primitif et l'on a $\Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x + \sum_{i,j} x_i \otimes x_j$, avec $\partial^{\circ} x_i < n$, $\partial^{\circ} x_j < n$ et $\sum x_i \otimes x_j \neq 0$. Alors $(f \otimes f)(\sum x_i \otimes x_j) \neq 0$, ce qui est absurde puisque $f(x) = 0$ implique $\Delta f(x) = 0$.

Les réciproques sont immédiates .

Remarquons enfin que, si $f : H \rightarrow K$ est un morphisme de \mathbb{H} et si $Q(f)$ est bijectif, alors f est un épimorphisme essentiel ; si $P(f)$ est bijectif, alors f est un monomorphisme essentiel .

1.3. La catégorie \mathbb{H} est une catégorie abélienne, localement noethérienne : les objets noethériens sont les algèbres de Hopf de type fini ([2],[6]) .

Rappelons (confer [6]) que le conoyau d'un morphisme $f : H \rightarrow K$ a pour algèbre sous-jacente $K/K.f(I(H))$, et que le noyau de f a pour espace vectoriel sous-jacent le noyau de l'homomorphisme k -linéaire :

$$H \xrightarrow{\Delta} H \otimes H \xrightarrow{f \otimes H} K \otimes H \xrightarrow{\theta \otimes H} I(K) \otimes H ,$$

où θ est la projection canonique de K sur $I(K)$.

Pour vérifier que \mathbb{H} est une catégorie abélienne il reste à montrer, d'après [1], que tout monomorphisme est un noyau et tout épimorphisme un conoyau. Ceci est démontré dans [6] .

1.4. Tout objet noethérien de \mathbb{H} admet une suite de composition dont les quotients sont de types ${}_n E$, ${}_n L$ ou ${}_n S$. Nous dirons que les ${}_n E$, ${}_n L$, ${}_n S$ sont les algèbres de Hopf élémentaires .

Précisons enfin que, si $\text{car } k = 0$, les ${}_n E$ et ${}_m L$ sont des objets simples de \mathbb{H} , et ce sont les seuls (à isomorphisme près) : en effet, si S est un objet simple de \mathbb{H} et x un élément de degré positif minimal, x est primitif et la sous-algè-

bre qu'il engendre est un sous-objet de S de l'un des types ${}_m L$ ou ${}_n E$, donc S est de type ${}_m L$ ou ${}_n E$.

Lorsque $\text{car } k = p \neq 0$, on voit de même que les objets simples de \mathbb{H} sont les ${}_n E$ et ${}_m S$ (les quotients de ${}_m L$ étant alors les $k[x]/(x^{p^r}), r \in \mathbb{N}$).

1.5. Toute algèbre de \mathbb{H}^- est somme directe d'algèbres de type ${}_n E$.

Il suffit de vérifier que $\text{Ext}_{\mathbb{H}}^1({}_n E, {}_m E) = 0$ pour tous m et $n > 0$. Par dualité on se ramène au cas $n \leq m$. Alors, si $0 \rightarrow {}_m E \rightarrow E \rightarrow {}_n E \rightarrow 0$ est une suite exacte, \bar{x} un générateur de ${}_n E$, et x un relèvement de \bar{x} dans E , x est primitif car de degré minimal dans E ; par conséquent le morphisme $s: {}_n E \rightarrow E$ défini par $s(\bar{x}) = x$ est une section de π . Ainsi $E \cong E_m \oplus E_n$.

1.6. Soient \mathcal{C} une catégorie localement noethérienne et \mathcal{E} un ensemble d'objets noethériens de \mathcal{C} tel que tout objet noethérien ait une suite de composition dont les quotients sont isomorphes à des objets de \mathcal{E} ; nous laissons au lecteur le soin de vérifier les résultats suivants :

a) Un objet I de \mathcal{C} est injectif ssi $\text{Ext}_{\mathbb{H}}^1(E, I) = 0$ pour tout $E \in \mathcal{E}$.

b) Si $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \cup \mathcal{E}^-$ est une partition de \mathcal{E} telle que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(E^+, E^-) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E^-, E^+) = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(E^+, E^-) = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(E^-, E^+) = 0$ pour tous $E^+ \in \mathcal{E}^+$ et $E^- \in \mathcal{E}^-$, soit \mathcal{C}^+ (resp. \mathcal{C}^-) la plus petite sous-catégorie localisante de \mathcal{C} contenant \mathcal{E}^+ (resp. \mathcal{E}^-), alors le foncteur $(M, N) \mapsto M \oplus N$ est une équivalence de $\mathcal{C}^+ \times \mathcal{C}^-$ sur \mathcal{C} .

c) Si, pour tous E et E' dans \mathcal{E} , on a $\text{Ext}_{\mathbb{H}}^m(E, E') = 0$ pour $m > n$, alors la dimension homologique de \mathcal{C} est $\leq n$.

1.7. La catégorie \mathbb{H} est produit direct des catégories \mathbb{H}^+ et \mathbb{H}^- .

On pose : $\mathcal{E}^- = \{ {}_n E, n \in \mathbb{N}^* \}$

et $\mathcal{E}^+ = \{ {}_n L, n \in \mathbb{N}^* \}$ lorsque $\text{car } k = 0$

$\{ {}_n L, n \in \mathbb{N}^* \} \cup \{ {}_n S, n \in \mathbb{N}^* \}$ lorsque $\text{car } k = p \neq 0$.

On est ramené à démontrer que $\text{Ext}_{\mathbb{H}}^1({}_n E, H) = \text{Ext}_{\mathbb{H}}^1(H, {}_n E) = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $H \in \mathcal{E}^+$ (1.6. b). On vérifie d'abord que $\text{Ext}_{\mathbb{H}}^1({}_n E, K) = 0$

pour $K \in \mathbb{H}^+$: en effet, soient $0 \rightarrow K \rightarrow E \xrightarrow{\pi} E \rightarrow 0$ une suite exacte, \bar{x} un générateur de ${}_n E$, et x un relèvement de \bar{x} dans E ; comme K n'a que des éléments de degrés pairs, x est primitif et permet de définir une section s de π en posant $s(\bar{x}) = x$. Enfin, par dualité, on obtient : $\text{Ext}_{\mathbb{H}}^1(H, {}_n E) = 0$ pour tout objet noethérien H de \mathbb{H}^+ .

1.8. Lorsque $\text{car } k = 0$, tout objet de \mathbb{H} est somme directe d'objets des types ${}_n E$ ou ${}_n L$. En effet, on vérifie aisément dans ce cas que $\text{Ext}_{\mathbb{H}}^1({}_n L, {}_m L) = 0$ pour tous m et n .

2. Décomposition de la catégorie \mathbb{H}^+

Nous supposons désormais que $\text{car } k = p \neq 0$, et nous posons $\mathbb{N}_p = \{n \in \mathbb{N}^* \mid (n, p) = 1\}$.

Si $n \in \mathbb{N}_p$, nous désignons par \mathbb{H}_n la plus petite sous-catégorie localisante de \mathbb{H}^+ contenant ${}_n L$: tout objet de \mathbb{H}_n est obtenu à partir de ${}_n L$ par construction de sous objets, d'objets quotients, d'extensions et de limites inductives. La catégorie \mathbb{H}_n est donc formée des algèbres de Hopf K telles que $Q(K)$ soit concentré en degrés $2p^i \cdot n$, $i \in \mathbb{N}$. Si K est une algèbre réflexive de \mathbb{H}_n , il en est de même de K^* , et par conséquent \mathbb{H}_n est formée des algèbres K telles que $P(K)$ soit concentré en degrés $2p^i \cdot n$, $i \in \mathbb{N}$.

THEOREME . La catégorie \mathbb{H}^+ est produit direct des catégories \mathbb{H}_n , $n \in \mathbb{N}_p$.

Il suffit de vérifier que, quels que soient m et $n \in \mathbb{N}_p$, distincts, on a $\text{Ext}_{\mathbb{H}}^1(H, K) = \text{Ext}_{\mathbb{H}}^1(K, H) = 0$ pour tous objets élémentaires H de \mathbb{H}_n et K de \mathbb{H}_m (1.6.b).

2.1. LEMME . On a $\text{Ext}_{\mathbb{H}}^1({}_r S, {}_s S) = 0$ pour $r \neq sp$ et $s \neq rp$, et $\text{Ext}_{\mathbb{H}}^1({}_r S, {}_s L) = 0$ pour $r \leq s$ et $s \neq rp$.

Pour la première assertion on peut supposer $r \leq s$, quitte à dualiser ensuite. Soient alors $0 \rightarrow {}_s S \xrightarrow{i} E \rightarrow {}_r S \rightarrow 0$ une suite exacte, y un générateur de ${}_s S$, \bar{x} un générateur de ${}_r S$ et x un relèvement de \bar{x} dans E ; x et $i(y)$ sont primitifs dans E . L'étude de $Q(E)$ donne deux possibilités :

1°. $[Q(E) : k] = 1$ et alors $i(y) = \lambda \cdot x^p$, avec $\lambda \in k$. On a donc $E \simeq k[X]/(X^p)$, mais $s = rp$.

2°. $[Q(E) : k] = 2$ et $E \cong_r S \oplus_s S$.

D'où la première partie du lemme. La deuxième se démontre de façon analogue.

2.2. LEMME. Lorsque K est une algèbre de Hopf telle que $K_m = 0$ pour $0 < m \leq 2n$, on a $\text{Ext}_{\mathbb{H}}^1(\binom{j}{i} L, K) = 0$.

En effet, si $0 \rightarrow K \rightarrow E \xrightarrow{\pi} \binom{j}{i} L \rightarrow 0$ est une suite exacte, un relèvement x dans E d'un générateur \bar{x} de $\binom{j}{i} L$ est primitif car de degré minimal dans E ; comme \bar{x} n'est pas nilpotent il en est de même de x et on définit une section s de π en posant $s(\bar{x}) = x$.

2.3. En reprenant les notations ci-dessus, on déduit de 2.1. que $\text{Ext}_{\mathbb{H}}^1(\binom{i}{p \cdot n} S, \binom{j}{p \cdot m} S) = 0$ pour tous i et j dans \mathbb{N} . On en déduit que $\text{Ext}_{\mathbb{H}}^1(\binom{i}{p \cdot n} S, \binom{j}{p \cdot m} L) = 0$ pour i et j dans \mathbb{N} : en effet, i étant fixé, le lemme 2.1. nous donne cette égalité pour j assez grand, et l'on conclut en remarquant que $\text{Ext}_{\mathbb{H}}^1(\binom{i}{p \cdot n} S, \binom{j+1}{p \cdot m} L) \cong \text{Ext}_{\mathbb{H}}^1(\binom{i}{p \cdot n} S, \binom{j}{p \cdot m} L)$ pour tout j (utiliser la suite exacte $0 \rightarrow \binom{j+1}{p \cdot m} L \rightarrow \binom{j}{p \cdot n} L \rightarrow \binom{j}{p \cdot m} S \rightarrow 0$). On montre ensuite que $\text{Ext}_{\mathbb{H}}^1(\binom{j}{p \cdot n} L, \binom{i}{p \cdot m} S) = 0$: posons ${}_r H = k[x]/(x^{p^{r+1}})$ avec $\partial^{\circ} x = 2p^j n$; on a $\text{Ext}_{\mathbb{H}}^1(\binom{j}{p \cdot n} L, \binom{i}{p \cdot m} S) \cong \text{Ext}_{\mathbb{H}}^1(\binom{i}{p \cdot m} S, (\binom{j}{p \cdot n} L)^*) \cong \cong \text{Ext}_{\mathbb{H}}^1(\binom{i}{p \cdot m} S, \varinjlim_r ({}_r H)^*) \cong \varinjlim_r \text{Ext}_{\mathbb{H}}^1(\binom{i}{p \cdot m} S, ({}_r H)^*)$, et ce dernier terme est nul (utiliser la dualité et les suites exactes $0 \rightarrow \binom{j+r}{p \cdot n} S \rightarrow {}_r H \rightarrow {}_{r-1} H \rightarrow 0$). L'égalité $\text{Ext}_{\mathbb{H}}^1(\binom{j}{p \cdot n} L, \binom{i}{p \cdot m} L) = 0$ se démontre alors comme l'égalité $\text{Ext}_{\mathbb{H}}^1(\binom{j}{p \cdot n} S, \binom{i}{p \cdot m} L) = 0$. D'où le théorème.

L'étude de la catégorie \mathbb{H}^+ se ramène donc à celle des catégories \mathbb{H}_n , et, quitte à faire une homothétie sur les degrés, il suffit d'étudier \mathbb{H}_1 .

Nous supposons désormais que le corps k est parfait.

3 . Etude des objets injectifs et projectifs de \mathbb{H}_1

3.1. Pour simplifier l'écriture nous appelons \mathbb{H}_1 -algèbre les objets de \mathbb{H}_1 et nous écrirons $\text{Hom}(H,K)$ et $\text{Ext}^1(H,K)$ au lieu de $\text{Hom}_{\mathbb{H}_1}(H,K)$ et $\text{Ext}_{\mathbb{H}_1}^1(H,K)$ pour tout couple (H,K) d'objets de \mathbb{H}_1 . Enfin nous posons : ${}^mS = \frac{1}{p^m}S$ et ${}^mL = \frac{1}{p^m}L$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Nous introduisons les \mathbb{H}_1 -algèbres suivantes [2] :

- $k[\underline{X}] = k[X_0, X_1, \dots, X_n, \dots]$ est l'algèbre de polynômes par rapport aux indéterminées $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$; la graduation est déterminée par $\partial^0 X_n = 2p^n$, $n \in \mathbb{N}$, et la comultiplication par les formules ci-dessous :

$$\Delta X_0 = X_0 \otimes 1 + 1 \otimes X_0 ,$$

$$\Delta X_1 = X_1 \otimes 1 + 1 \otimes X_1 + \frac{1}{p} (X_0^p \otimes 1 + 1 \otimes X_0^p - (\Delta X_0)^p) ,$$

.....

$$\begin{aligned} \Delta X_n = & X_n \otimes 1 + 1 \otimes X_n + \frac{1}{p} [X_{n-1}^p \otimes 1 + 1 \otimes X_{n-1}^p - (\Delta X_{n-1})^p] + \\ & + \frac{1}{2} [X_{n-2}^{p^2} \otimes 1 + 1 \otimes X_{n-2}^{p^2} - (\Delta X_{n-2})^{p^2}] + \dots + \frac{1}{p^n} [X_0^{p^n} \otimes 1 + 1 \otimes X_0^{p^n} - \\ & (\Delta X_0)^{p^n}] , \end{aligned}$$

.....

Ces formules ont le sens suivant : lorsqu'on effectue le calcul des coefficients dans \mathbb{Q} on constate qu'ils sont entiers et on les réduit modulo p .

- ${}^n\mathbb{P}$ est la sous-algèbre de Hopf de $k[\underline{X}]$ engendrée par X_0, X_1, \dots, X_n . En particulier ${}^0\mathbb{P} = {}^0L$.

- ${}^n\mathbb{I}$ est l'algèbre quotient $k[\underline{X}]/(X_0^{p^{n+1}}, X_1^{p^{n+1}}, \dots, X_m^{p^{n+1}}, \dots)$.

Pour tous $m \leq n$ dans \mathbb{N} , nous désignons par $\varphi_n : k[\underline{X}] \rightarrow {}^n\mathbb{I}$ et par $\varphi_{m,n} : {}^n\mathbb{I} \rightarrow {}^m\mathbb{I}$ les projections canoniques ; de même $j_n : {}^n\mathbb{P} \rightarrow k[\underline{X}]$ et $j_{n,m} : {}^m\mathbb{P} \rightarrow {}^n\mathbb{P}$ sont les injections canoniques.

Si l'on "oublie" la graduation, $k[\underline{X}]$ est la bialgèbre du k -foncteur en groupes W des vecteurs de Witt de longueur infinie (confer 4.3.), et ${}^n\mathbb{P}$ celle du k -foncteur en groupes W_{n+1} des vecteurs de Witt de longueur $n+1$.

3.2. Les objets simples de \mathbb{H}_1 sont les ${}^n\mathbb{S}$, $n \in \mathbb{N}$. Si l'on désigne par \mathbb{H}'_1 la sous-catégorie pleine de \mathbb{H}_1 formée des objets de dimension de Krull nulle (i.e. qui sont réunion de sous-objets de longueur finie), la catégorie quotient $\mathbb{H}_1/\mathbb{H}'_1$ admet ${}^0\mathbb{L}$ pour seul objet simple, et sa dimension de Krull est nulle.

Ainsi, la dimension de Krull de \mathbb{H}_1 est 1 [3].

Les injectifs indécomposables de \mathbb{H}_1 sont les enveloppes injectives des objets simples ${}^n\mathbb{S}$ de \mathbb{H}_1 et de l'objet simple ${}^0\mathbb{L}$ de $\mathbb{H}_1/\mathbb{H}'_1$ [3].

THEOREME . Lorsque le corps k est parfait, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- a) ${}^n\mathbb{I}$ est l'enveloppe injective de ${}^n\mathbb{S}$;
- b) si J est un objet de socle ${}^n\mathbb{S}$ qui admet une suite de composition dont les quotients sont ${}^0\mathbb{L}^*, {}^1\mathbb{L}^*, \dots, {}^n\mathbb{L}^*$, alors J est isomorphe à ${}^n\mathbb{I}$;
- c) on a un isomorphisme ${}^n\mathbb{I}^* \simeq {}^n\mathbb{P}$, et ${}^n\mathbb{P}$ est la couverture projective de ${}^n\mathbb{S}$.
- d) On a un isomorphisme $k[X] \simeq k[X]^*$, et $k[X]$ est à la fois l'enveloppe injective de ${}^0\mathbb{L}$ et la couverture projective de ${}^0\mathbb{L}^*$.

Pour les parties a), b), c) nous raisonnons par récurrence sur n .

3.2.1. Remarquons d'abord que ${}^0\mathbb{P} \simeq {}^0\mathbb{I}$. En effet $Q({}^0\mathbb{I}^*) \simeq P({}^0\mathbb{I})$ est nul sauf en degré 2 où sa dimension sur k est 1, donc il est isomorphe à $Q({}^0\mathbb{P})$. Soit x un générateur de ${}^0\mathbb{I}^*$, x ne peut être nilpotent sinon $({}^0\mathbb{I}^*)_n$ serait nul pour n assez grand, donc, en tant qu'algèbre, ${}^0\mathbb{I}^*$ s'identifie à $k[x]$. Comme toute algèbre de Hopf dont l'algèbre sous-jacente est $k[x]$, avec $\partial^0 x = 2$, est isomorphe à ${}^0\mathbb{P}$, on a bien ${}^0\mathbb{P} \simeq {}^0\mathbb{I}^*$.

D'après le lemme 2.2., ${}^0\mathbb{P} = {}^0\mathbb{L}$ est un objet projectif de \mathbb{H}_1 ; donc ${}^0\mathbb{I}$ est injectif (utiliser la dualité et 1.6. a). Il est clair que le morphisme naturel ${}^0\mathbb{S} \leftrightarrow {}^0\mathbb{I}$ est essentiel puisque tout sous-objet non nul de ${}^0\mathbb{I}$ contient au moins un élément primitif, donc contient $({}^0\mathbb{I})_2$ et par suite ${}^0\mathbb{S}$.

Donc ${}^0\mathbb{I}$ est l'enveloppe injective de ${}^0\mathbb{S}$, et ${}^0\mathbb{P}$ en est la couverture projective.

Si nous supposons que ${}^{n-1}I$ est l'enveloppe injective de ${}^{n-1}S$ et que l'on a un isomorphisme $({}^{n-1}P)^* \simeq {}^{n-1}I$, nous remarquons que :

α) $\text{Hom}({}^mS, {}^{n-1}I) = 0$ pour $m \neq n-1$, et $\text{Hom}({}^{n-1}S, {}^{n-1}I) \simeq k$ en tant que $\text{End}({}^{n-1}S) = k$ -module à droite.

β) $P_r({}^{n-1}I) \simeq (Q({}^{n-1}P))_r$ est nul sauf si $r = 2p^m$, avec $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Comme $X_0^{p^m}$ est primitif dans ${}^{n-1}I$ (pour $m < n$) on voit que les seuls éléments homogènes primitifs de ${}^{n-1}I$ sont de la forme $\lambda X_0^{p^m}$, pour $m = 0, 1, \dots, n-1$, $\lambda \in k$.

3.2.2. LEMME. Si I est une H_1 -algèbre possédant les propriétés suivantes :

- (i) on a une suite exacte $0 \rightarrow {}^nL^* \rightarrow I \xrightarrow{\Pi} {}^{n-1}I \rightarrow 0$.
- (ii) $\text{Hom}({}^{n-1}S, I) = 0$,

alors I est l'enveloppe injective de nS .

Pour vérifier que I est injectif nous prouvons par récurrence sur n les égalités : $\text{Ext}^1({}^mL, I) = 0 = \text{Ext}^1({}^mS, I)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ (1.6. a).

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ on déduit de (i) une suite exacte :

$$\text{Ext}^1({}^mL, {}^nL^*) \rightarrow \text{Ext}^1({}^mL, I) \rightarrow \text{Ext}^1({}^mL, {}^{n-1}I)$$

dans laquelle le dernier terme est nul (hypothèse de récurrence) ; le premier est aussi nul : en effet le lemme 2.2. nous donne ce résultat pour $m \leq n$, donc aussi, par dualité, pour $m > n$. Et par suite $\text{Ext}^1({}^mL, I) = 0$.

Pour tout m on a une suite exacte $0 \rightarrow {}^{m+1}L \xrightarrow{j} {}^mL \rightarrow {}^mS \rightarrow 0$; on en déduit la suite exacte de $\text{End } I$ -modules à gauche :

$$(*) \quad 0 \rightarrow \text{Hom}({}^mS, I) \rightarrow \text{Hom}({}^mL, I) \xrightarrow{j^*} \text{Hom}({}^{m+1}L, I) \rightarrow \text{Ext}^1({}^mS, I) \rightarrow 0.$$

On étudie j^* et les deux termes centraux, i.e. $P_{2p^m}(I)$ et $P_{2p^{m+1}}(I)$. De l'hypothèse (i) on déduit une suite exacte de k -espaces vectoriels $0 \rightarrow P({}^nL^*) \rightarrow P(I) \xrightarrow{P(\Pi)} P({}^{n-1}I)$. Mais Π est un isomorphisme en degrés $< 2p^n$, donc $P(\Pi)$ est une surjection (remarque β). Comme, de plus, $P({}^nL^*) \simeq Q({}^nL) \simeq kx$ où x est de degré $2p^n$, on voit que $P(I)$ est concentré en degrés $2p^r$ avec $r \leq n$; plus précisément, $\text{Hom}({}^mL, I) = 0$ pour $m > n$ et $\text{Hom}({}^mL, I) \simeq k$ en tant que $\text{End}({}^mL) = k$ -module à droite, pour $m \leq n$.

Ainsi, lorsque $m \geq n$ la suite (*) nous donne $\text{Ext}^1({}^mS, I) = 0$. Par ailleurs, si $m < n$, on vérifie aisément que $j^*(f.\alpha) = j^*(f).\alpha^P$ tout $\alpha \in k$ et $f \in \text{Hom}({}^mL, I)$. Comme k est parfait, j^* sera un isomorphisme, (et par suite $\text{Ext}^1({}^mS, I) = 0$) ssi $\text{Hom}({}^mS, I) = 0$; ceci est vrai par hypothèse pour $m = n-1$; prouvons le pour $m < n-1$: si $f: {}^mS \rightarrow I$ est un morphisme non nul, $\pi \circ f$ est non nul, car $\text{Hom}({}^mS, {}^nL^*) = 0$, et ceci est impossible d'après la remarque α). Et finalement, $\text{Ext}^1({}^mS, I) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$.

Il est clair, maintenant, que nS est le socle de I car $\text{Hom}({}^mS, I) = 0$ pour $m < n$, $\text{Hom}({}^nS, I) \simeq \text{Hom}({}^nS, {}^nL^*) \simeq k$ et enfin $\text{Hom}({}^mS, I) = 0$ pour $m > n$ car $P(I)$ est concentré en degrés $\leq 2p^n$.

3.2.3. Ce lemme va nous permettre de prouver les résultats a), b) et c) au cran n . En effet nI vérifie l'hypothèse (i): on passe de oL à nL par une simple homothétie sur les degrés, alors ${}^nL^*$ s'identifie à la sous-algèbre de nI engendrée par les $(X_i^P)^n_{i \in \mathbb{N}}$, et le quotient est ${}^{n-1}I$, Elle vérifie aussi (ii): posons ${}^{n-1}S = k[x]/(x^P)$ avec $\partial^o x = 2p^{n-1}$; soit $f: {}^{n-1}S \rightarrow {}^nI$ un homomorphisme non nul, on doit avoir $f(x) \in P_{2p^{n-1}}({}^nI) \simeq P_{2p^{n-1}}({}^{n-1}I)$, donc $f(x) = \lambda X_0^{P^{n-1}}$, mais ceci est impossible car $x^P = 0$ implique $f(x)^P = 0$. Ainsi nI est l'enveloppe injective de nS .

Le résultat b) est immédiat (si J est de dimension de Krull nulle et a pour socle nS , J est une extension essentielle de nS et se plonge dans nI).

Démonstration de c): on montre que ${}^n_P^*$ est l'enveloppe injective de nS . En dualisant la suite exacte:

$$0 \longrightarrow {}^{n-1}P \xrightarrow{j_{n,n-1}} {}^nP \longrightarrow {}^nL \longrightarrow 0$$

on voit que ${}^n_P^*$ vérifie (i). Par ailleurs $\text{Hom}({}^{n-1}S, {}^n_P^*) \simeq \text{Hom}({}^nP, {}^{n-1}S)$, et ce second membre est nul: en effet si $f: {}^nP \rightarrow {}^{n-1}S$ était un morphisme non nul on aurait $f(X_0) = f(X_1) = \dots = f(X_{n-2}) = 0$, $f(X_{n-1}) = x \neq 0$ et $f(X_n) = 0$ alors que $f(\Delta X_n) = \sum_{i=1}^{P-1} \frac{1}{P} \binom{P}{i} x^i \otimes x^{P-i} \neq 0$.

On a donc $\text{Ext}^1({}^nP, H) = 0$ pour toute algèbre réflexive H , et l'on conclut grâce au lemme suivant:

3.2.4. LEMME . Si P est une H_1 -algèbre réflexive telle que $\text{Ext}^1(P, H) = 0$ pour toute algèbre réflexive H , alors P est projective .

Pour la démonstration il suffit de remarquer que, si $f : E \rightarrow P$ est une surjection, il existe une sous-algèbre réflexive E' de E telle que $f(E') = P$. Alors toute suite exacte $0 \rightarrow F \rightarrow E \xrightarrow{f} P \rightarrow 0$ se scinde puisque la suite $0 \rightarrow \text{Ker}(f|_{E'}) \rightarrow E' \rightarrow P \rightarrow 0$ est scindée par hypothèse.

3.2.5. Démonstration de d) : le système projectif formé par les ${}^m I$ et les projections canoniques admet $k[X]$ pour limite projective, et il possède les propriétés suivantes :

- (1) les morphismes $\varprojlim({}^n I) \rightarrow {}^n I$ sont des épimorphismes ;
- (2) les homomorphismes induits $P({}^m I) \rightarrow P({}^{m'} I)$ ($m' \leq m$) sont surjectifs (3.2.1., remarque β) ;
- (3) pour tous $m \geq n$ on a $\text{Hom}({}^n L, {}^m I) \simeq k X_O^{P^n}$; et le morphisme $f : \text{Hom}({}^{n-1} L, {}^m I) \rightarrow \text{Hom}({}^n L, {}^m I)$ induit par l'injection canonique ${}^n L \rightarrow {}^{n-1} L$ est défini par $f(X_O^{P^{n-1}}) = X_O^{P^n}$.

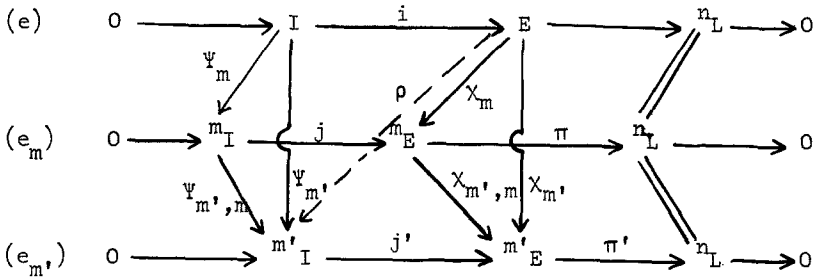
Remarquons que la propriété (1) équivaut à dire que les morphismes de transitions ${}^m I \rightarrow {}^{m'} I$ sont des épimorphismes ou encore que le système projectif considéré est "localement constant" .

LEMME . Si un système projectif $({}^m I, \Psi_{m, m'})$, formé à partir des ${}^m I$ possède les propriétés (1) à (3), alors sa limite projective I est un objet injectif de H_1 .

On désigne par $\Psi_m : I \rightarrow {}^m I$ le morphisme canonique et l'on montre d'abord que $\text{Ext}^1({}^n L, I) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Donnons nous une extension $e : 0 \rightarrow I \rightarrow E \rightarrow {}^n L \rightarrow 0$. Les épimorphismes Ψ_m permettent alors de déterminer une famille $(e_m)_{m \in \mathbb{N}}$ d'extensions $0 \rightarrow {}^m I \rightarrow {}^m E \rightarrow {}^n L \rightarrow 0$ et deux familles $(\chi_m : E \rightarrow {}^m E, m \in \mathbb{N})$ et $(\chi_{m', m} : {}^m E \rightarrow {}^{m'} E, m > m')$ d'épimorphismes tels que, pour tout (m, m') , le diagramme ci-dessous soit commutatif et les $({}^m E, \chi_{m', m})$ forment un système projectif (on pose ${}^m E = E \prod_I {}^m I$ et χ_m est le morphisme canonique ; comme ${}^{m'} E \simeq {}^{m'} I \oplus {}^n L$ on a $\chi_{m'} = (\rho, \pi \circ \chi_m)$ avec $\rho \circ i = \Psi_m$; on remarque alors que $\text{Ker } \chi_m \subset \text{Ker } \rho$, donc ρ se

prolonge en $\chi' : {}^m E \rightarrow {}^{m'} I$ et l'on pose $\chi_{m',m} = j' \circ \chi'$.



On en déduit un morphisme $\chi : E \rightarrow \varinjlim {}^m E$ qui est donc un isomorphisme. Nous sommes donc ramenés à vérifier que $\varinjlim {}^m E \cong {}^n L \oplus \varinjlim {}^m I$, ce qui revient à démontrer que, pour $m > m'$, la donnée d'une section s' de π' détermine une section s de π .

Soit x un générateur de ${}^n L$, se donner s' équivaut à se donner un élément $y = s'(x)$ de $P({}^{m'} E)$ tel que $\pi'(y) = x$. Comme e_m et $e_{m'}$ sont scindées on a $P({}^m E) \cong P({}^m I) \oplus P({}^n L)$ et $P({}^{m'} E) \cong P({}^{m'} I) \oplus P({}^n L)$; alors $P(\chi_{m',m})$ est une surjection puisque $P(\psi_{m',m})$ en est une. Dans ces conditions on peut choisir $z \in P({}^m I)$ en sorte que $\chi_{m',m}(z) = y$, et l'on détermine la section cherchée en posant $s(x) = z$.

De l'égalité $\text{Ext}^1({}^n L, I) = 0$ et de la suite exacte $0 \rightarrow {}^{n+1} L \rightarrow {}^n L \rightarrow {}^n S \rightarrow 0$ nous déduisons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une suite exacte :

$$\text{Hom}({}^n L, I) \xrightarrow{f} \text{Hom}({}^{n+1} L, I) \rightarrow \text{Ext}^1({}^n S, I) \rightarrow 0.$$

Comme f est surjectif (propriété (3)), on a $\text{Ext}^1({}^n S, I) = 0$, et le lemme s'ensuit.

Ainsi, $k[X]$ est injectif. Comme de plus on a $P(k[X]) \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}({}^n L, k[X]) \cong \bigoplus_{n \geq 0} \varinjlim_m \text{Hom}({}^n L, {}^m I) \cong \bigoplus_{n \geq 0} k X_0^{P^n}$, l'injection naturelle ${}^0 L \rightarrow k[X]$ induit un isomorphisme $P({}^0 L) \cong P(k[X])$; donc $k[X]$ est une extension essentielle de ${}^0 L$ (confer 1.2.), d'où la première partie de d).

Nous déduisons encore de ce lemme un isomorphisme entre $k[X]$ et sa duale. En effet le système projectif $({}^m P, j_{m,m'})$ a pour limite

$k[\underline{X}]$ et il possède les propriétés duales de (1), (2) et (3). Enfin, la projection canonique $k[\underline{X}] \rightarrow \mathcal{O}_1 \simeq \mathcal{O}_L^*$ est essentielle car elle induit un isomorphisme $Q(k[\underline{X}]) \simeq Q(\mathcal{O}_L^*) \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} kX_n$ (confer 1.2.). Alors le système inductif dual $({}^m P^* \simeq {}^m I, j_{m,m}^*)$ (confer c)) vérifie les hypothèses du lemme ; comme il a pour limite inductive $k[\underline{X}]^*$ on a l'isomorphisme cherché.

Enfin, on conclut par 3.2.4. que $k[\underline{X}]$ est projectif .

3.3. THEOREME . La dimension homologique de \mathbb{H}_1 est 2 .

La suite exacte $0 \rightarrow {}^{n-1}P \rightarrow {}^n P \rightarrow {}^n L \rightarrow 0$ est une résolution projective de ${}^n L$, et par conséquent $\text{Ext}^i({}^n L, K) = 0$ pour $i \geq 2$ et $K \in \mathbb{H}_1$.

En utilisant la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte (*) $0 \rightarrow {}^{n+1}L \rightarrow {}^n L \rightarrow {}^n S \rightarrow 0$ on déduit : $\text{Ext}^i({}^n S, K) = 0$ pour $i \geq 3$ et $K \in \mathbb{H}_1$.

La dimension homologique de \mathbb{H}_1 est donc ≤ 2 (1.6. c). En fait elle est égale à 2 parce que $\text{Ext}^2({}^n S, {}^n S) \neq 0$. En effet, de (*) on déduit la suite exacte :

$$\dots \rightarrow \text{Ext}^1({}^n L, {}^n S) \rightarrow \text{Ext}^1({}^{n+1}L, {}^n S) \rightarrow \text{Ext}^2({}^n S, {}^n S) \rightarrow 0 ,$$

dans laquelle $\text{Ext}^1({}^n L, {}^n S) = 0$ et $\text{Ext}^1({}^{n+1}L, {}^n S)$ est un espace vectoriel de dimension 1 sur $\text{End}({}^n S) = k$ (confer démonstration 2.1.) .

COROLLAIRE . La dimension homologique de \mathbb{H} est 2 .

4 . Lien avec les \mathcal{O}_k^* -modules et les modules de Greenberg [4]

Dans ce n° un foncteur est un foncteur de la catégorie A_k des k -algèbres commutatives dans celle des ensembles. Un foncteur en groupes (resp. en anneaux) est un foncteur de A_k dans la catégorie des groupes (resp. des anneaux). Nous désignons par Ac_k la catégorie des k -schémas en groupes commutatifs et affines. Si $A \in A_k$, nous désignons par $\text{Spec} A$ le foncteur défini par $\text{Spec} A(R) = \text{Hom}_{A_k}(A, R)$ pour tout $R \in A_k$.

4.1. Avec les notations de [4], O_k est le foncteur en anneaux tel que $O_k(R) = R$ pour tout $R \in A_k$. Un O_k^X -module consiste en la donnée d'un k -foncteur en groupes commutatifs M et d'un morphisme $\mu : O_k \times M \rightarrow M$ tel que l'on ait, en posant $\mu(a, m) = a.m$,

$$\begin{aligned} a.(m+m') &= a.m + a.m' \\ (ab).m &= a.(b.m) \\ 1.m &= m \end{aligned}$$

pour tout $R \in A_k$, tous $a, b \in R = O_k^X(R)$ et tous $m, m' \in M(R)$.

Un O_k^X -module affine $M = \text{Spec } A$ est défini par la donnée d'une k -bigèbre A à comultiplication commutative, munie d'une graduation de type \mathbb{N} , compatible avec la multiplication et la comultiplication Δ_A . En effet, avec les notations ci-dessus, si $M = \text{Spec } A$, μ correspond à un morphisme $\delta : A \rightarrow k[t] \otimes A$ de A_k ; si l'on pose $\delta(a) = \sum_{n \geq 0} t^n \otimes \delta_n(a)$, on obtient, en transcrivant les propriétés de μ , $A = \bigoplus_{n \geq 0} \delta_n(A)$. Réciproquement, supposons connue la graduation $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$: si $a \in R = O_k^X(R)$ et $m \in \text{Hom}_{A_k}(A, R)$, on a $\mu(a, m) = f$ avec $f(\alpha) = \sum_n m(\alpha_n) a^n$ pour tout $\alpha = \sum \alpha_n \in A$. On peut aussi dire que se donner un O_k^X -module affine $M = \text{Spec } A$ équivaut à se donner une algèbre de Hopf $A = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, non nécessairement connexe (A_0 est une bigèbre) telle que $A_n = 0$ pour tout n impair (alors $x \in A_{2n}$ ssi $\delta x = t^n \otimes x$). Nous dirons que A est une algèbre de Hopf paire.

4.2. Il est clair que toute algèbre de Hopf paire A est somme directe de la sous algèbre de Hopf A_0 , formée de ses termes de degré 0, et de l'algèbre de Hopf connexe A' noyau de la projection canonique $A \rightarrow A_0$.

La catégorie des algèbres de Hopf paires est donc produit direct de la catégorie \mathcal{H}_0 des algèbres de Hopf concentrées en degré 0 et de \mathcal{H}^+ . Cette décomposition est équivalente à celle de la catégorie des O_k^X -modules affines en O_k^X -modules triviaux et en O_k^X -modules tels que $\mu(0, m) = 0.m = 0$ avec les notations ci-dessus [4].

4.3. Soit W le foncteur en groupes qui à tout $R \in A_k$ associe le groupe additif des vecteurs de Witt de longueur infinie sur R .

Désignons encore par $k[\underline{X}]$ la bigèbre sous-jacente à $k[\underline{X}]$; la comultiplication Δ détermine sur le foncteur $\text{Spec } k[\underline{X}] : R \mapsto \text{Hom}_{A_k}(k[\underline{X}], R)$ une structure de foncteur en groupes commutatifs (si f et g sont deux morphismes de $k[\underline{X}]$ dans R , $f \dot{+} g$ est le composé :

$$k[\underline{X}] \xrightarrow{\Delta} k[\underline{X}] \otimes k[\underline{X}] \xrightarrow{f \otimes g} R \otimes R \xrightarrow{\text{mult.}} R).$$

Alors l'application $\varphi_R : \text{Hom}_{A_k}(k[\underline{X}], R) \rightarrow W_k(R)$ qui à tout morphisme $f : k[\underline{X}] \rightarrow R$ associe le vecteur de Witt $\varphi_R(f) = (f(X_0), f(X_1), \dots, f(X_n), \dots)$ est un isomorphisme de groupes. D'où un isomorphisme $\varphi : \text{Spec } k[\underline{X}] \xrightarrow{\sim} W$.

On peut aussi considérer W comme foncteur en anneaux, (pour tout $R \in A_k$, $W(R)$ est l'anneau des vecteurs de Witt de longueur infinie sur R). On appelle alors module de Greenberg tout W -module affine L (pour tout $R \in A_k$, $L(R)$ est muni d'une structure de $W(R)$ -module dépendant fonctoriellement de R) et l'on désigne par Green_k la catégorie des modules de Greenberg.

Pour tout $n \in \mathbb{N}_p$ et tout $L = \text{Spec } A \in \text{Green}_k$, on désigne par $H_n(L)$ le O_k^* -module $\text{Spec } A$ muni de l'opération $a.l = (a^n, 0, \dots).l$ pour tous $R \in M_k$, $a \in R$ et $l \in L(R)$, et l'on désigne par $h_n(L)$ l'algèbre de Hopf paire associée, d'algèbre sous-jacente A .

4.3.1. LEMME. Si $L = \text{Spec } A \in \text{Green}_k$, alors $h_1(L)$ est une H_1 -algèbre.

On remarque que, si $\delta : A \rightarrow k[\underline{X}] \otimes A$ est le morphisme de A_k définissant l'opération de W sur L , et $\delta_1 : A \rightarrow k[t] \otimes A$ celui qui définit l'opération de O_k^* , on a $\delta_1 = (\pi \otimes A) \circ \delta$, où $\pi : k[\underline{X}] \rightarrow k[t]$ est défini par $\pi(X_0) = t$ et $\pi(X_n) = 0$ pour $n > 0$. En particulier, on a, par définition, $A_{2m} = \{x \in A \mid \delta x = X_0^m \otimes x + y, \text{ avec } (\pi \otimes A)(y) = 0\}$.

Comme, par hypothèse, pour tout $R \in A_k$ et pour tous w et $w' \in W(R)$, $l \in L(R)$ on a $(w + w').l = w.l + w'.l$, le diagramme ci-dessous, dans lequel $T(a \otimes b) = b \otimes a$, est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{\delta} & k[\underline{X}] \otimes A & \xrightarrow{\Delta \otimes A} & k[\underline{X}] \otimes k[\underline{X}] \otimes A \\
 \Delta_A \downarrow & & & & \uparrow k[\underline{X}] \otimes k[\underline{X}] \otimes \text{mult.} \\
 A \otimes A & \xrightarrow{\delta \otimes \delta} & k[\underline{X}] \otimes A \otimes k[\underline{X}] \otimes A & \xrightarrow{k[\underline{X}] \otimes T \otimes A} & k[\underline{X}] \otimes k[\underline{X}] \otimes A \otimes A
 \end{array}$$

Pour démontrer le lemme nous vérifions que $P(A)$ est concentré en degrés $2p^m$, $m \in \mathbb{N}$. Pour $x \in P(A)$, la commutativité du diagramme ci-dessus s'exprime par l'égalité $(\Delta' \otimes A)(\delta x) = 0$, avec $\Delta' = \Delta - \text{Id} \otimes 1 - 1 \otimes \text{Id}$. Le lemme découle alors de la propriété suivante : $P(k[\underline{X}]) \otimes A$ est le noyau de $\Delta' \otimes A$ (en effet $P(k[\underline{X}]) = \text{Ker } \Delta'$, et le produit tensoriel sur k est un foncteur exact).

4.3.2. LEMME. Soit $A \in \mathfrak{H}_1$; si $L = \text{Spec } A$ peut être muni d'une structure de W -module telle que $h_1(L) = A$ alors celle-ci est unique.

Pour tout $R \in A_k$ et pour tous $a \in R$ et $l \in L(R)$ on doit avoir $(a, 0 \dots).l = a * l$, et $p^n.l = \underbrace{l + l + \dots + l}_{p^n}$; ceci suffit à assurer l'unicité de l'opération $\mu : W \times L \rightarrow L$. En effet, pour calculer $(0, \dots, 0, a_n, 0 \dots).l$ on utilise une extension R' de R contenant un x tel que $x^{p^n} = a_n$, alors, dans $L(R')$, on doit avoir $(0, \dots, 0, a_n, 0, \dots).l = p^n.(x * l)$ et ce terme est dans $L(R)$ puisqu'on a supposé l'existence d'une structure de W -module sur L ; si, pour tout n , on considère l'inclusion naturelle $\text{Spec}({}^n P) \rightarrow W$ qui à tout $(a_0, \dots, a_n) \in \text{Hom}({}^n P, R)$ associe $(a_0, \dots, a_n, 0, \dots, 0) \in W(R)$, on a donc montré que la restriction $\mu_n : \text{Spec}({}^n P) \times L \rightarrow L$ de μ est déterminée de manière unique. Autrement dit, si $\delta : A \rightarrow k[\underline{X}] \otimes A$ est le morphisme de A_k associé à μ , $\pi_n : k[\underline{X}] \rightarrow {}^n P$ la projection canonique (dans $A_k!$), et $\pi : k[\underline{X}] \rightarrow \varinjlim {}^n P$ le morphisme induit, alors $\delta_n = (\pi_n \otimes A) \circ \delta$ est déterminé de manière unique, et par conséquent $\delta' = (\pi \otimes A) \circ \delta$ aussi. Comme π est une injection on en déduit l'unicité de δ , donc de μ .

4.4. THEOREME. Lorsque k est parfait, le foncteur h_1 est une équivalence entre les catégories Green_k et \mathfrak{H}_1 .

Nous retrouvons alors comme corollaire un résultat de [4] .

Démonstration . a) Comme H_1 commute aux limites projectives, h_1 transforme limites projectives en limites inductives .

b) h_1 est pleinement fidèle . En effet, soient L et $M \in \text{Green}_k$, il est clair que $H_1(L, M) : \text{Hom}_{\text{Green}_k}(L, M) \rightarrow \text{Hom}_{O_k^x}(L, M)$ est une injection ; montrons que c'est une surjection. Soit $f : L \rightarrow M$ un morphisme de O_k^x -modules, pour tous $R \in A_k$, $a \in R$ et $x \in L(R)$ on a : $a * [f(R)(x)] = f(R)(a * x)$, d'où $(a, 0, \dots, \cdot) \cdot [f(R)(x)] = f(R)[(a, 0, \dots, \cdot) \cdot x]$ et de plus $p^n \cdot [f(R)(x)] = f(R) \cdot (p^n \cdot x)$ on en déduit, par un raisonnement analogue à celui de 4.3.2., que $f(R)$ commute avec $(0, \dots, 0, a_n, 0, \dots)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in R$, et enfin qu'il commute avec tout $w = (a_0, \dots, a_n, \dots) \in W(R)$.

c) On vérifie aisément que $h_1(W) = k[\underline{X}]$ (on munit la bigèbre $k[\underline{X}]$ de la seule graduation compatible avec la multiplication et la comultiplication et telle que $\partial^0 X_0 = 2$). De même, en considérant sur le schéma W_n des vecteurs de Witt de longueur n la structure naturelle de W -module, on a $h_1(W_n) = {}^{n-1}P$. Alors, tout objet H de \mathcal{H}_1 est l'image par h_1 d'un objet M de Green_k : en effet, H possède une présentation $P' \xrightarrow{f} P \rightarrow H \rightarrow 0$ dans laquelle P et P' sont des sommes directes d'objets des types ${}^n P$ et $k[\underline{X}]$; on a donc deux objets N et N' et un morphisme $g : N' \rightarrow N$ de Green_k tels que $h_1(N) = P$, $h_1(N') = P'$ et $h_1(g) = f$, et l'on pose $M = \text{coker } g$. D'après 4.3.2. cet objet M est unique à isomorphisme près et le théorème s'ensuit.

5 . Théorème de Structure

5.1. Etude de l'anneau \mathcal{A} des endomorphismes de $k[\underline{X}]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a un isomorphisme $\varphi_n : \text{Spec}({}^n P) \xrightarrow{\sim} W_{n+1}$ (4.3.). Pour tous $m < n$ nous notons $R^{n-m} : W_{n+1} \rightarrow W_{m+1}$ la projection canonique définie par $R^{n-m}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ pour tous $A \in A_k$ et $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in W_{n+1}(A)$. Alors R^{n-m} est le morphisme induit par l'injection canonique $j_{n,m} : {}^m P \rightarrow {}^n P$.

5.1.1 Remarquons que l'on a une opération naturelle

$\rho : W_{n+1}(k) \rightarrow \text{End}_{\mathcal{H}_1}({}^n P) \subset W_{n+1}({}^n P)$ de $W_{n+1}(k)$ sur ${}^n P$: si

$\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in W_{n+1}(k)$, on pose $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \dot{\times} (X_0, \dots, X_n) = (y_0, \dots, y_n)$ ($\dot{\times}$ est la multiplication de $W_{n+1}({}^n P)$), et $\rho(\lambda)$ est défini par $\rho(\lambda)(X_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n$. D'où, une structure de $W_{n+1}(k)$ -module sur $\text{Hom}_{\mathbb{H}_1}({}^n P, H)$ pour tout $H \in \mathbb{H}_1$.

On définit, de manière analogue, un morphisme injectif

$$i_n : W_{n+1}(k) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{H}_1}({}^n P, k[X]) \subset W_{n+1}(k[X])$$

en posant $i_n(\lambda) = \lambda \dot{\times} (X_0, \dots, X_n) \simeq i_n(1) \circ \rho(\lambda)$, où $i_n(1)$ est l'inclusion canonique.

PROPOSITION. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, i_n est un isomorphisme, et la famille $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ détermine un isomorphisme $i : W(k) \simeq \text{End}(k[X])$.

On a $W(k) = \varinjlim W_{n+1}(k)$ et $\text{End} k[X] \simeq \varinjlim \text{Hom}({}^n P, k[X])$. Si les i_n sont des isomorphismes, la deuxième partie de la proposition devient évidente car ils sont compatibles avec les morphismes de transition.

Montrons, par récurrence sur n , que i_n est un isomorphisme. C'est évident pour $n = 0$. Supposons que i_n soit un isomorphisme ; de la suite exacte

$$0 \rightarrow {}^n P \rightarrow {}^{n+1} P \xrightarrow{f} {}^{n+1} L \rightarrow 0$$

on déduit l'exactitude de la première ligne du diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}({}^{n+1} L, k[X]) & \longrightarrow & \text{Hom}({}^{n+1} P, k[X]) & \longrightarrow & \text{Hom}({}^n P, k[X]) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow i'_{n+1} & & \uparrow i_{n+1} & & \uparrow i_n \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{J}_{n+1} & \longrightarrow & W_{n+2}(k) & \xrightarrow{R} & W_{n+1}(k) \longrightarrow 0 \end{array}$$

où \mathfrak{J}_{n+1} est l'idéal des vecteurs de Witt de la forme $(0, \dots, 0, \lambda_{n+1})$.

Posons $x = f(X_{n+1})$, $i'_{n+1}((0, \dots, 0, \lambda_{n+1}))$ est l'homomorphisme qui en-

voie x sur $\lambda_{n+1} X_0^{P, n+1}$ et c'est un isomorphisme puisque

$\text{Hom}({}^{n+1} L, k[X]) \simeq P_{2P, n+1}(k[X]) \simeq k X_0^{P, n+1}$ (3.2.5.). D'où la proposition.

5.1.2. COROLLAIRE. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$ l'anneau $\text{End}({}^n P)$ est isomorphe à l'anneau $W_{n+1}(k)$ des vecteurs de Witt de longueur $n+1$ sur k .

Désignons par $\mathfrak{S} : \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{H}_1$ le foncteur suspension qui à toute

\mathbb{H}_1 -algèbre H associe l'algèbre $\mathbb{S}H$ obtenue par une simple homothétie sur les degrés $(\mathbb{S}H)_{p,n} = H_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, et $(\mathbb{S}H)_m = 0$ si $p \nmid m$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow {}^n P \rightarrow k[\underline{X}] \xrightarrow{f} \mathbb{S}^{n+1} k[\underline{X}] \rightarrow 0$$

dans laquelle, si l'on pose $\mathbb{S}^{n+1} k[\underline{X}] = k[\underline{Y}]$ avec $\partial^0 Y_i = 2p^{n+1+i}$, f est le morphisme défini par : $f(X_i) = 0$ pour $i \leq n$, $f(X_i) = Y_{i-n-1}$ pour $i > n$.

On en déduit une suite exacte de $W_{n+1}(k)$ -modules :

$$0 \rightarrow \text{Hom}({}^n P, {}^n P) \rightarrow \text{Hom}({}^n P, k[\underline{X}]) \rightarrow \text{Hom}({}^n P, \mathbb{S}^{n+1}(k[\underline{X}])) \rightarrow 0$$

dans laquelle le dernier terme est nul (car $(Q({}^n P))_m = 0$ pour $m > 2p^n$), et le corollaire s'ensuit.

5.2. Etude des modules $\text{Hom}({}^n P, {}^m P)$.

Nous désignerons par $j_{m,n} : {}^n P = k[X_0, \dots, X_n] \rightarrow {}^m P = k[Y_0, \dots, Y_m]$ le morphisme suivant : si $n < m$, $j_{m,n}$ est l'injection canonique, et si $n > m$, $j_{m,n}$ est défini par $j_{m,n}(X_r) = 0$ pour $r < n-m$ et $j_{m,n}(X_r) = Y_{r-n+m}^p$ pour $r \geq n-m$.

Remarque. Si $n < m$, on a vu que le morphisme $\tilde{j}_{m,n} : W_{m+1} \rightarrow W_{n+1}$ induit par $j_{m,n}$ est la projection canonique R^{m-n} ; le composé $\tilde{j}_{m,n} \circ \tilde{j}_{n,m} : W_{n+1} \rightarrow W_{n+1}$ n'est autre que la multiplication par p^{m-n} .

Pour $n < m$, nous désignons par (m,n) la suite exacte :

$$0 \longrightarrow {}^n P \xrightarrow{j_{m,n}} {}^m P \xrightarrow{\pi_{m,n}} \mathbb{S}^{n+1}({}^{m-n-1} P) \longrightarrow 0.$$

PROPOSITION. (i) Pour $n < m$, $\text{Hom}({}^n P, {}^m P)$ est le $W_{n+1}(k)$ -module à droite libre engendré par $j_{m,n}$. La structure de $W_{m+1}(k)$ -module à gauche est déterminée par : $\lambda * j_{m,n} = j_{m,n} * R^{m-n}(\lambda)$ pour tout $\lambda \in W_{m+1}(k)$.

(ii) Pour $n > m$, $\text{Hom}({}^n P, {}^m P)$ est le $W_{m+1}(k)$ -module à gauche libre engendré par $j_{m,n}$. La structure de $W_{n+1}(k)$ -module à droite est déterminée par : $j_{m,n} * \lambda = R^{n-m}(\lambda) * j_{m,n}$ pour tout $\lambda \in W_{n+1}(k)$.

(i) Pour $n < m$ tout morphisme $f : {}^n P \rightarrow {}^m P$ se factorise à travers l'injection $j_{m,n}$. En effet, de la suite exacte (m,n) on déduit l'isomorphisme de $\text{End}({}^n P)$ -modules à droite :

$$\text{Hom}({}^n_P, {}^n_P) \simeq \text{Hom}({}^n_P, {}^m_P) , \text{ car } \text{Hom}({}^n_P, \mathbb{S}^{n+1}({}^{m-n-1}_P)) = 0$$

(les générateurs de n_P sont de degrés inférieurs à $2p^{n+1}$). D'où la première assertion. La deuxième s'en déduit alors d'après la remarque ci-dessus.

(ii) Pour $m < n$, on déduit de la suite (n, m) la suite exacte de $W_{n+1}(k)$ -modules :

$$0 \rightarrow \text{Hom}({}^n_P, {}^m_P) \rightarrow \text{Hom}({}^n_P, {}^n_P) \rightarrow \text{Hom}({}^n_P, \mathbb{S}^{m+1}({}^{n-m-1}_P)) \rightarrow 0 .$$

Ainsi, $\text{Hom}({}^n_P, {}^m_P)$ est isomorphe à l'idéal \mathfrak{J} de $W_{n+1}(k)$ formé des morphismes $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ tels que $\pi_{m,n} \circ \lambda = 0$, i.e. à $p^{n-m}W_{n+1}(k)$ puisque k est parfait.

L'annulateur de \mathfrak{J} est le noyau $p^{m+1}W_{n+1}(k)$ de la projection canonique R^{n-m} ; d'où, par restriction des scalaires, une structure de $W_{m+1}(k)$ -module pour laquelle \mathfrak{J} est isomorphe à $W_{m+1}(k)$. On achève la démonstration en vérifiant la relation : $j_{m,n} * \lambda = R^{n-m}(\lambda) * j_{m,n}$.

5.3. Désignons par \mathcal{P} la sous-catégorie pleine de \mathfrak{H}_1 formée des n_P , $n \in \mathbb{N}$; c'est une catégorie préadditive (i.e. les $\text{Hom}_{\mathcal{P}}({}^i_P, {}^j_P)$ sont munis d'une structure de groupe abéliens et les applications de composition sont bilinéaires). Soit \mathcal{B} la catégorie des foncteurs contravariants additifs de \mathcal{P} dans la catégorie des groupes abéliens, on désigne par M le foncteur de \mathfrak{H}_1 dans \mathcal{B} qui à toute \mathfrak{H}_1 -algèbre H associe le foncteur $M(H) = \text{Hom}(\mathcal{P}, H)$, $P \in \mathcal{P}$.

THEOREME . Le foncteur $M = \text{Hom}(\mathcal{P}, ?)$ est une équivalence entre \mathfrak{H}_1 et \mathcal{B} .

Il suffit, pour le montrer, de vérifier que les $({}^n_P)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une famille de générateurs projectifs de "type fini" pour \mathfrak{H}_1 [1]. Soit $f: H \rightarrow K$ un morphisme non nul de \mathfrak{H}_1 , on pose $H' = H/\text{Ker } f \neq 0$; soit $x \in P(H')$, $x \neq 0$, si $\partial^\circ x = 2p^n$ on définit un morphisme $g': {}^n_P \rightarrow H'$ en posant $g'(X_i) = 0$ pour $i < n$ et $g'(X_n) = x$. Alors, n_P étant projectif, g' se relève en $g: {}^n_P \rightarrow H$ tel que $f \circ g \neq 0$, C.Q.F.D.

Remarque . On peut "décrire" $M(H)$ au noyau d'un $W(k)$ -module à droite M gradué de type \mathbb{N} , muni de deux endomorphismes F et V de degrés respectifs $+1$ et -1 ,

$$M_0(H) \xrightarrow{F} M_1(H) \rightleftharpoons \dots \rightleftharpoons M_{n-1}(H) \xrightarrow{F} M_n(H) \rightleftharpoons \dots ,$$

vérifiant les relations : (1) $p^{n+1}M_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(2) $FV = VF = p$ (multiplication par p) .

En effet, pour tout $H \in \mathcal{H}_1$, $\text{Hom}({}^n P, H) = M_n(H)$ est un $W_{n+1}(k)$ -module à droite (5.1.1) donc un $W(k)$ -module à droite. Pour tout $n \geq 0$, $j_{n+1, n} : {}^n P \rightarrow {}^{n+1} P$ détermine, par composition des morphismes, une application $V_n : M_{n+1}(H) \rightarrow M_n(H)$, de même $j_{n, n+1} : {}^{n+1} P \rightarrow {}^n P$ détermine $F_n : M_n(H) \rightarrow M_{n+1}(H)$. Alors, d'après 5.2. , V_n et F_n sont des homomorphismes de $W(k)$ -modules et l'on pose $V = (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $F = (F_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Comme $j_{n+m, n}$ est le composé de m applications de la forme $j_{r+1, r}$, la famille $(j_{n+m, n})_{n \in \mathbb{N}}$ correspond à V^n ; de même $(j_{n, n+m})_{n \in \mathbb{N}}$ correspond à F^m .

Par composition de $j_{n, n+1}$ et $j_{n+1, n}$, on vérifie que $VF = FV = p$ et, d'après 5.2. , on a ainsi les seules relations entre les V^m et F^n pour m et n dans \mathbb{N} .

La catégorie \mathcal{D} est alors isomorphe à celle dont les objets sont les triples (M, V, F) vérifiant les propriétés ci-dessus et les morphismes sont les morphismes de $W(k)$ -modules gradués de degré 0 compatibles avec F et V .

5.4. Application aux algèbres engendrées par leurs éléments primitifs .

Soit $H \in \mathcal{H}_1$ une telle algèbre ; on sait que H est un quotient d'une somme directe d'objets des types ${}^n L$, $n \in \mathbb{N} [1]$. Comme $M({}^n L)$ est représenté par :

$$0 \rightleftharpoons 0 \dots 0 \rightleftharpoons M_n = k \begin{matrix} \text{Id} & & \\ & \text{Id} & \\ & & \text{Id} \end{matrix} \begin{matrix} \\ k \\ k \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ 0 \end{matrix} \dots$$

on en déduit que l'opérateur V est nul sur $M(H)$.

Réciproquement, supposons que V soit nul sur $M(H)$ et montrons que H est un quotient d'une somme directe des ${}^n L$. Comme $p = 0$ sur $M(H)$ on est ramené à montrer que tout espace vectoriel gradué

$M = \sum_{n \in \mathbb{N}} M_n$ sur k , muni d'un homomorphisme $F :$

$$M = M_0 \xrightarrow{F} M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_n \xrightarrow{F} M_{n+1} \rightarrow \dots$$

est un quotient de modules "libres" , i.e. de la forme :

$${}^n \mathcal{L} = 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow k e_n \xrightarrow{\text{Id}} k e_{n+1} \xrightarrow{\text{Id}} k e_{n+2} \rightarrow \dots$$

Ce dernier résultat est évident : en effet, si $x \in M_n$ on définit un morphisme $f: {}^n\mathcal{L} \rightarrow M$ en posant $f(e_n) = x$, d'où un épimorphisme

$$\bigoplus_{\substack{x \in M_n \\ n \in \mathbb{N}}} {}^n\mathcal{L}_x \rightarrow M.$$

Ainsi, les \mathbb{H}_1 -algèbres H engendrées par leurs éléments primitifs sont celles pour lesquelles V est nul sur $M(H)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} k[X_0, \dots, X_n] = {}^n P & \xrightarrow{\epsilon_n} & {}^n L = k[X] \\ \uparrow j_{n,n+1} & & \uparrow l_{n,n+1} \\ {}^{n+1} P & \xrightarrow{\epsilon_{n+1}} & {}^{n+1} L = k[Y] \end{array}$$

(avec $\epsilon_n(X_i) = 0$ pour $i < n$, $\epsilon_n(X_n) = X$ et $l_{n,n+1}(Y) = X^P$) ; et, pour toute \mathbb{H}_1 -algèbre H engendrée par ses éléments primitifs, ϵ_n induit une bijection :

$$\epsilon_n^* : P_{2p^n}(H) \rightarrow M_n(H)$$

telle que $\epsilon_n^*(\lambda \cdot f) = \lambda^{p^{-n}} \cdot \epsilon_n^*(f)$ pour tous $f \in P_{2p^n}(H)$ et $\lambda \in k$.

Soit $\sigma^n : k \rightarrow k$ l'automorphisme $\lambda \mapsto \lambda^{p^n}$ et $k^{(p^n)}$ la structure d'espace vectoriel induite sur k par σ^n ; on pose $\tilde{M}_n(H) = M_n(H) \otimes_k k^{(p^n)}$ (autrement dit, on munit $M_n(H)$ de la multiplication $m * \lambda = m \cdot \lambda^{p^{-n}}$)

et l'on désigne par $\tilde{M}(H)$ l'espace vectoriel $\sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{M}_n(H)$ muni de l'opérateur \tilde{F} induit par F . Alors ϵ_n^* est un k -isomorphisme de

$P_{2p^n}(H)$ sur $\tilde{M}_n(H)$ et, pour tout $x \in P_{2p^n}(H)$, on a

$$\tilde{F} \circ \epsilon_n^*(x) = \epsilon_{n+1}^*(x^P).$$

Ainsi, modulo un changement de graduation, $\tilde{M}(H)$ s'identifie à $P(H)$ muni de l'opérateur $x \mapsto x^P$.

B i b l i o g r a p h i e

- [1] FREYD P. : Abelian categories, Harper International Editions, (1966) .
- [2] GABRIEL P. : Séminaire J.P. Serre (1960) .
- [3] GABRIEL P. : Des catégories abéliennes, Bull. Soc. Math. France 90, 323-448 (1962) .
- [4] GABRIEL P. et DEMAZURE M. : Groupes algébriques linéaires, North Holland Publishing Company (à paraître) .
- [5] MILNOR J. and MOORE J.C. : On the structure of Hopf algebras, Ann. Math. 81, 211-264 (1965) .
- [6] MILNOR J. and MOORE J.C. : On the structure of Hopf Algebras, Princeton, multigraphié (1960) .
- [7] WRAITH G.C. : Abelian Hopf algebras, J. Algebra 6, 135-156 (1967) .

Colette Schoeller

Institut de Recherche Mathématique
Avancée
7, rue René Descartes
67-Strasbourg

(Reçu le 22 janvier 1970)